一 生小兔问题引起的



十三世纪初，意大利比萨的一位叫伦纳德，绰号为斐波那契（Fibonacci，1170～1250）* 的数学家，在一本题为《算盘书》**的数学著作中，提出下面一个有趣的问题：

兔子出生以后两个月就能生小兔，若每次不多不少恰好生一对（一雌一雄）．假如养了初生的小兔一对，试问一年以后共可有多少对兔子（如果生下的小兔都不死的话）？

我们来推算一下．如图1—1：

第一个月：只有一对小兔；

第二个月：小兔子没有长成不会生殖，仍然只有一对兔子；

第三个月：这对兔子生了一对小兔，这时共

---

* Fibonacci 是 filius Bonacci 的简写，意思是“波那契之子”．

** 这儿的“算盘”是指用来计算的沙盘，不是我国的算盘。《算盘书》（Liber Abaci，1202）是一本研究算术（及代数）的书籍，abacus 直译为“算盘”，它源自希腊文 'αβαξ．这是对后几个世纪欧洲数学发展起着重要作用的书籍，也是向欧洲人传播印度——阿拉伯字码的最早论著．

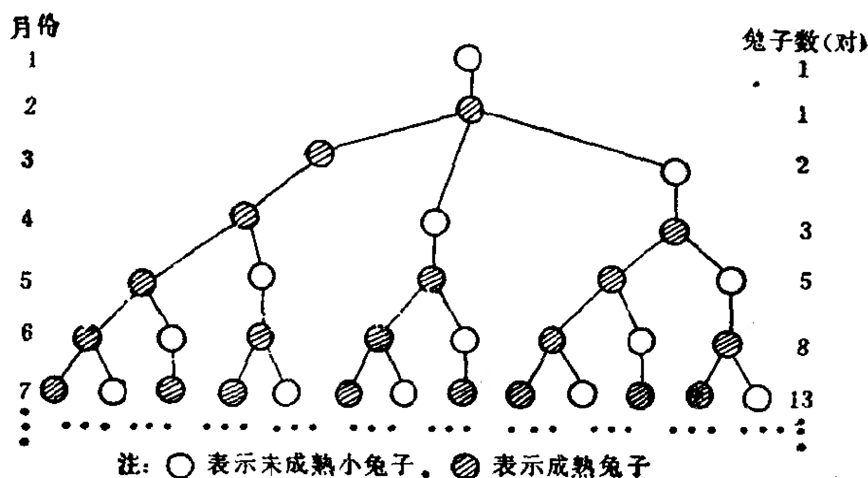


图 1—1

有两对兔子；

第四个月：老兔子又生了一对小兔，而上月出生的小兔还未成熟，这时共有三对兔子；

第五个月：这时已有两对兔子可以生殖（原来的老兔和第三个月出生的小兔），于是生了两对小兔，这时共有五对兔子；

………………………………

如此推算下去，我们不难得出下面的结果（这里列成一张表）：

月份数	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	…
兔子数（对）	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	…

从表中可知：一年后（第十三个月时）共有兔子233对。

用这种办法来推算，似乎有些“笨”，而且越往后越使人觉得复杂。有无简单办法推算？

我们把上表中下面一列数用 $\{u_n\}$ 表示（有时也用 $\{F_n\}$ 表示，下标 n 表示月份数，兔子数可视为月份数的函数），则它们被称为斐波那契数列，记

$\{u_n\}$：1，1，2，3，5，8，13，21，34，…

且 u_n 称为斐波那契数。

1634年数学家奇拉特发现（那已是斐氏死后近四百年的事了）：斐波那契数列之间有如下递推关系：

$$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$$

其实这个式子并不难理解，试想：第 $n+1$ 个月时的兔子可分为两类：一类是第 n 个月时的兔子，另一类是当月新出生的小兔，而这些小兔数恰好是第 $n-1$ 个月时兔子数（它们到第 $n+1$ 个月时均可生殖）。

由于这一发现，生小兔问题引起了人们的极大兴趣，首先计算这列数方便多了：人们不仅可以轻而易举地算出一年以后的兔子数，甚至可以算出两年、三年、…以后的兔子数（这要用原来办法推算恐怕是繁琐至极）。再者由于人们继续对这个数列探讨，又发现了它的许多奇特的性质。

比如它们项数间的更一般关系是：

$u_{m+n} = u_{n-1}\ u_m + u_n u_{m+1}$ （m、$n \in N$）

我们可以用数学归纳法证明如下（对 m 归纳）：

1） $m=1$时，$u_{n+1} = u_{n-1} + u_n = u_{n-1}u_1 + u_n u_2$，即命题真（注意到 $u_1 = u_2 = 1$）。

类似地我们可以证明 $m=2$ 时命题也真，即 $u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_n u_3$。

2）设 $m \leqslant k$ 时真，今考虑 $m=k+1$ 的情形：

由归纳假设有 $u_{n+k-1} = u_{n-1}u_{k-1} + u_n u_k$ 及 $u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1}$，两式两边相加有：

$$u_{n+k-1} + u_{k+n} = u_{n-1}(u_{k+1} + u_k) + u_n(u_k + u_{k+1})$$

注意到：$u_{n+k+1} = u_{n+k-1} + u_{n+k}$ 及$u_{k-1} + u_k = u_{k+1}$，$u_k + u_{k+1} = u_{k+2}$，故$u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+2}$。

即 $m=k+1$ 时亦真，从而对任何自然m命题成立（这里用的是第二归纳法）。

1680年，卡西尼发现了下面关于斐氏数列项间重要的关系式：

$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$$

它可以直接用数学归纳法去证明，但更为巧妙的证明方法，可由矩阵恒等式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

的简单证明得到：

1）$n=2$时，用矩阵乘法规则：

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_3&u_2\\u_2&u_1\end{pmatrix}$$

2）设 $n=k$ 时结论真，即

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}u_{k+1}&u_k\\u_k&u_{k-1}\end{pmatrix}$$

今考虑 $n=k+1$的情形：

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{k+1}&u_k\\u_k&u_{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}u_{k+1}+u_k&u_{k+1}\\u_k+u_{k-1}&u_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{k+2}&u_{k+1}\\u_{k+1}&u_k\end{pmatrix}$$

此即说 $n=k+1$时命题亦真，从而对任何自然数(＊)式成立。

对(＊)两边取行列式再展开化简后即为：

$$u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2=(-1)^n$$

从这个关系式中我们还可以发现，u_n 与u_{n+1}互质，即

$(u_n,u_{n+1})=1$（这里(a,b)表示 a、b 的最大公因子）

因为从式中可见：u_n 与 u_{n+1} 的任何公因子，都是$(-1)^n$ 的一个因子。

上面关系式的推广形式是：

$$u_{n-k}u_{m+k}-u_nu_m=(-1)^n u_{m-n-k}u_k$$

它的证明将要用到后面我们将提到的一个公式。至于它的讨论，我们在以后给出。

注 利用等式(*)我们还可以证明前面的结论：

$u_{m+n}=u_m u_{n+1}+u_{m-1}u_n$

这只须注意到：

$$\begin{pmatrix} u_{m+n} & u_{m+n-1} \\ u_{m+n-1} & u_{m+n-2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m+n-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix} u_m & u_{m-1} \\ u_{m-1} & u_{m-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{m+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

由矩阵乘法后再比较两边矩阵中左上角第一元素即可。

十八世纪初，棣美佛在其所著《分析集锦》(Miscellanea Analytica)中，给出斐波那契数列的通项表达式（又称为“封闭形式”，但它不唯一）：

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

它又称为比内公式，这是以最初证明它的数学家比内命名的，它又是一个十分耐人寻味的等式：式左是正整数，而式右则是由无理数来表达的。公式的重要性我们不说即明，因为斐氏数列的许多重要性质的证明都是通过它来完成的。

我们先来用数学归纳法证明这个等式，稍后我们还将给出它的另外一种证明。

1）$n=1$时，直接验算即可。

2）设 $n \leqslant k$ 时结论真，今考虑到 $n=k+1$ 的情形：

注意到 $u_{k+1}=u_k+u_{k-1}$及

$$
\begin{aligned}
u_k+u_{k-1}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\right.\\
&\quad\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right.\\
&\quad\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]
\end{aligned}
$$

从而命题对 $n=k+1$时真，因而对任何自然数公式都成立。

1753年，希姆松发现斐氏数列中前后两项u_n和 u_{n+1} 之比 u_n/u_{n+1} 是连分数

$$
\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}
$$

的第n个渐近分数。

这一点我们后文还要叙及。

1884年，法国数学家拉姆利用斐波那契数列证明：

应用辗转相除（欧几里得除法）法的步数（即辗转相除的次数）不大于较小的那个数的位数的五倍。

这是斐波那契数列的第一次有价值的应用（证明请见后文）。

1876年，数学家鲁卡斯发现：

方程 $x^2-x-1=0$的两个根$\tau_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\tau_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$的任何次方幂的线性组合都满足关系式：

$$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$$

同时他还发现并证明了下述结论：

一个数整除 u_m 和 u_n 的充要条件是这个数是u_d的因子，这里 $d=(m,n)$。

特别地，$(u_m, u_n)=u_{(m,n)}$。

证 我们已经证明了关系式：

$$u_{m+n}=u_m u_{n+1}+u_{m-1}u_n$$

由之我们可有：u_m 和 u_n 的任何公因子也是 u_{m+n} 的因子；且 u_{m+n} 和 u_n 的任何公因子

也是 $u_m u_{n+1}$ 的因子.

又$(u_m,u_n)=1$,即 u_m、u_n 互质，故 u_{m+n} 和 u_n 的公因子也能整除 u_m，这样

对整数 d，$d|u_m$ 且$d|u_n \Longleftrightarrow d|u_{n+m}$和$d|u_n$，这里“|”表示整除。

这个结论还可以推广为（可以用数学归纳法证）：

$d|u_m$ 且 $d|u_n \Longleftrightarrow d|u_{m+kn}$ 和 $d|u_n$，这里 k 是非负整数。

若 $r\equiv m(\mathrm{mod}\ n)$，则 u_m 和u_n 的公因子亦为 u_r 和 u_n 的公因子。

又若 $r_1\equiv n(\mathrm{mod}\ r)$，则 u_r 和 u_n 的公因子即为 u_r 和 u_{r_1} 的公因子。

……………………

如此下去，最后 $r_s=0$时，即 u_m 和 u_n 的公因子即为 $u_0=0$（规定！）和$u_{(m,n)}$的公因子。

此外，鲁卡斯还利用斐氏数列的性质证明 $2^{127}-1$是一个质数*（它有39位，要验证这一点并非轻而易举)，这也是斐氏数列的一个应用。

顺便指出：“斐波那契数列”的名称，正是

---

* 形如$2p-1$的质数叫麦森质数。若$M_n=2^n-1$是质数，则 p 必定是质数，反之则不然。

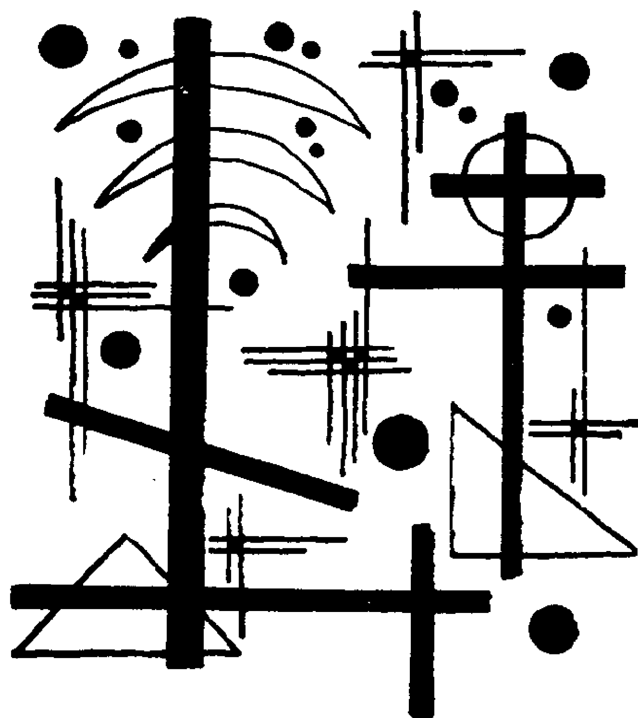
到目前为止，人们共找到30个麦森型质数，这些 $p=2,3,5,7,13,17,\cdots,44497,86243,132049,216091$，其中$2^{216091}-1$共有65050位。从第13个$M_{521}$开始，都是借助电子计算机找到的。

出自鲁卡斯之口。

本世纪五十年代出现的"优选法"中，也找到了斐波那契数列的巧妙应用，从而也使得这个曾作为故事或智力游戏的古老的"生小兔问题"所引出的数列，绽开了新花。

由于这个数列的越来越多的性质被人们所发现，越来越多的应用被人们找到，因而引起了敏感的数学家们的极大关注，一本专门研究它的杂志——《斐波那契季刊》(Fibonacci Quarterly)于1963年开始发行。

二 它们也产生斐波那契数列



斐波那契数列不只是在生小兔问题中才会遇到，它也出现在自然界、生活中……

1. 植物叶序中的斐氏数列

十六世纪德国天文学、数学家开卜勒对生物学中的数学问题很感兴趣，他曾经仔细地观察过蜂房的结构和形状后指出：

这种充满空间的对称蜂房的角应和菱形的十二面体的角一样.

而后，法国的天文学家马拉尔弟经仔细观测后指出：

这种菱形的角，一个为109°28′；另一个为72°32′.

法国的昆虫学家列俄木曾猜想：用这种角度建造蜂房大概是在相同的体积下最省材料的.

这个猜想后为瑞士的数学家寇尼希证得.

开卜勒还研究了“叶序”问题，即植物生长过程中叶、花、果在茎上的排列顺序问题，在他的

结论里也出现了与斐氏数列有关的数字（尽管当时这个数列还没有冠以斐波那契数列的尊号）：

植物的叶子在茎上的排列，对同一种植物来说是有一定规则的，若把位于茎周同一母线位置的两片叶子叫做一个周期的话，那么

$$W=\frac{\text{每个周期叶子绕的圈数}}{\text{每个周期里的全部叶子数}}$$

将是一些特定的数，它只是随植物品种不同而不同。比如：

榆树：叶子排列在茎的相对两翼（对称地排列），即它一周期有两片叶子，且一周期叶子仅绕一圈，故$W_{\text{榆}}=\frac{1}{2}$；

山毛榉：它的叶子从第三片开始循回，故$W_{\text{山毛榉}}=\frac{1}{3}$；

樱桃（橡树等）：叶子排列如图2—1，可知$W_{\text{樱桃}}=\frac{2}{5}$；

梨树：$W_{\text{梨}}=\frac{3}{8}$；

柳树：$W_{\text{柳}}=\frac{5}{13}$，

……………………

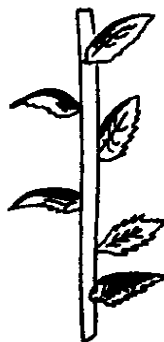


图 2—1

乍看上去，似乎没有什么规律，但你若把它们写在一起：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \cdots\cdots$$

细心的读者也许已经看到：这些分数的分子、分母都恰好各自组成一个斐波那契数列，更确切的讲：它们分别是斐氏数列的第 n 项与第 $n+2$项之比。

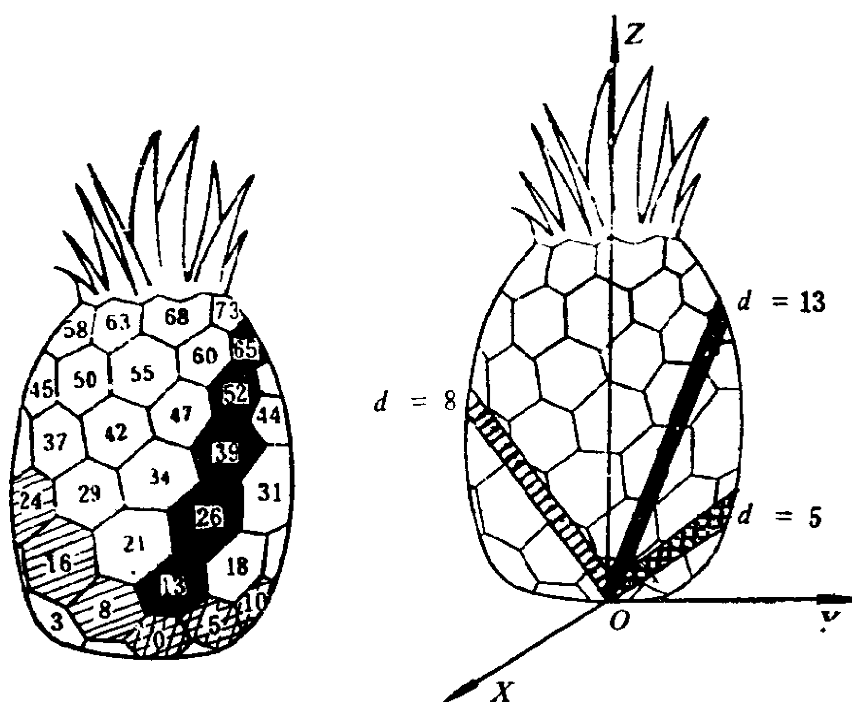
（顺便插一句：植物叶子在茎上的排列是按螺线方式进行的，且每三片叶子在螺线上的距离都服从"黄金分割"比。关于黄金分割我们后面将会谈到）

2. 菠萝的鳞片与斐波那契数列

我们再来看看菠萝。菠萝果外面的鳞状表皮均是一些不很规则的六边形。

把菠萝轴（中心线）视为 Z 轴，与之垂直的平面叫 XOY 平面（如图 2－2（1）），量一量菠萝的鳞状表皮六边形中心距 XOY 平面的距离(按照某个比例单位)，把它们记下来填到图 2－2（1）上。这个图上的数字初看上去似乎杂乱无章，其实不然，你若仔细观察便会发现：

那些彼此联系着的鳞状表皮上的数，有三个方向（系统）是按照等差数列方式排列的（方式是图 2－2（2））：



（1）　　　　图　2—2　　　　（2）

0、5、10、15、20、……（公差d是 5）

（与之方向平行的诸鳞片上的数字也如此）

0、8、16、24、32、……　　　　（公差d是 8）

（与之方向平行的诸鳞片上的数字也如此）

0、13、26、39、52、……　　　　（公差d是13）

（与之方向平行的诸鳞片上的数字也如此）

这三个方向所给出的诸等差数列，其公差分别是 5、 8、 13——它们恰好是斐氏数列中的三项。

3. 树枝生长、蜂进蜂房、上楼方式中的斐氏数

波兰数学家史坦因豪斯在其名著《数学万花筒中》中有这样一个问题*：

一棵树一年后长出一条新枝；新枝隔一年后成为老枝，老枝便可每年长出一条新枝。如此下去，十年后树枝将有多少（图2—3）？

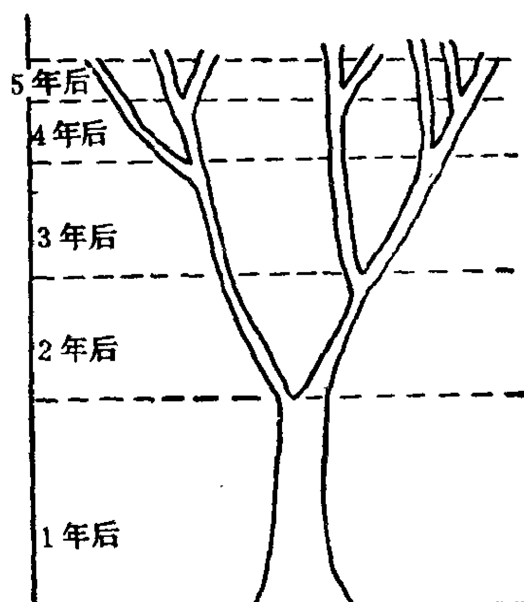


图　2—3

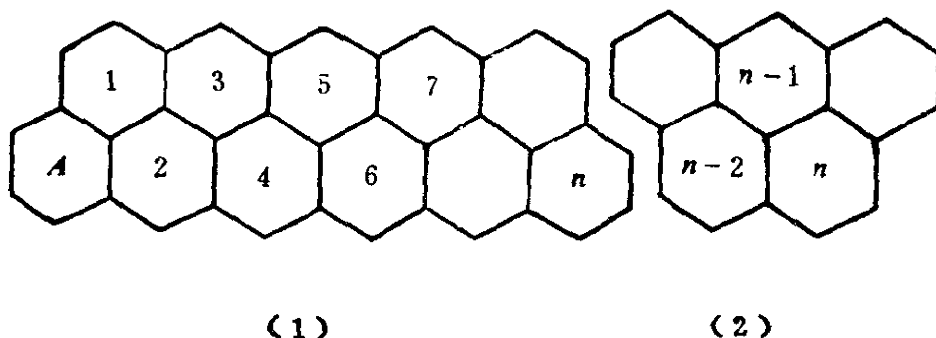
读者早已悟到：这个问题只是斐波那契数列问题的变化而已，即树枝的繁衍方式是按照斐波那契数列增加的。

---

* 这个问题实际上是数学家泽林斯基在一次国际数学会议上提出的。

我们再来考虑一个问题：蜜蜂进蜂房问题。

一只蜜蜂从蜂房A出发，想爬到第1、2、3、…、n号蜂房（见图2—4(1)），但只允许它自左向右（不许反向倒走），那么它爬到各号蜂房的路线数也恰好构成一个斐波那契数列。



(1)　　　　　　(2)

图　2—4

事实上，蜜蜂爬到1号蜂房有 $u_2=1$ 条路线，爬到2号蜂房有 $u_3=2$条路线（$A\to 2$或$A\to 1\to 2$），…

蜜蜂爬到n号蜂房的路线有两类：

一类是不经过 $n-1$号蜂房，直接从 $n-2$号蜂房进入第n号蜂房；

另一类是经过 $n-1$ 号蜂房(图2—4(2))。

从A爬到$n-2$号蜂房的路线是 u_{n-1}，从A爬到 $n-1$ 号蜂房的路线有 u_n，这样蜜蜂从A爬到第 n 号蜂房的路线有

$$u_{n-1}+u_n=u_{n+1}$$

条，显然$\{u_n\}$恰为斐波那契数列（注意到 $u_1=1$）。

这个问题与下面的问题无实质差异：

有 n 个村庄，分别用$A_1, A_2, \cdots, A_n$表示。某人从 A_1 出发按箭头方向（不许反向）绕一圈后，再回到 A_1 有多少种走法？

稍稍分析不难有：设走法数为a_n，则$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{k+1}=a_k+a_{k-1}$ $(k>1)$。

这恰好构成一个斐波那契数列。

上面的问题其实与下面的问题也是类似的：

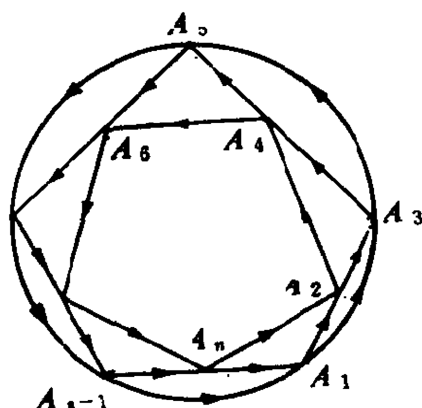


图 2—5

上楼梯时，若允许每次跨一磴或两磴，那么对于楼梯数为1、2、3、4、…时上楼的方式数恰好也是斐波那契数列：

1，2，3，5，8，…

这一点可由下页图中显示出来：

当然下面的问题实质与上两个问题也是相同的：

有一分和二分的硬币若干，问用它们组成（或支付）币值为1、2、3、4、5、…分的方式各有多少（这里各种组成或支付方式都是一枚一枚进行的，比如支付3分时，②①和①②看

楼梯磴数	上楼方式	数
1		1
2		2
3		3
4		5
…	… … …	…

作两种不同方式，这是因为前者先付 2 分又付 1 分，而后者是先付 1 分又付 2 分）？

我们再来看一个例子，它也和生物现象有关。

4. 雄蜂家族、钢琴键盘与斐氏数列

在蜜蜂王国里：雌蜂虽多，但仅有一只（蜂后）能产卵，余者皆工蜂。蜂后与雄蜂交配后产下蜂卵，其中绝大多数是受精卵，其孵化后为雌蜂（工蜂或蜂后），少数未受精卵即孵化成雄蜂。

若追溯一只雄蜂的家系，其任何一代的祖先数目，均为斐氏数列中的数，即它们构成斐氏数列。

13

8

5

3

2

表示雄蜂 1

表示雌蜂 1

图 2—6

如图2—6，一只雄蜂仅有一个母亲，故其两代数目均为1；而这只雄蜂的母亲必须是有父、母的，故其上溯第三代的数目是2；这一代雄蜂（即原来雄蜂的祖父）仅有母亲，而雌蜂（即原来雄蜂的祖母）则有一父一母，故上溯第四代的数目是3……

将雄蜂家系上溯第六代祖先（见图2—6），若雄蜂则用●表示；若雌蜂则用○表示，则此13只蜂排布如

○●○●○○●○●○●○○

有趣的是：它与钢琴琴键排布一致，如图2—7（13个半音）.

顺便讲一句，一个音节分为12个音调（连半音在内）若用简谱表示即：



图 2—7

(1, 1#, 2, 2#, 3, 4, 4#, 5, 5#, 6, 6#, 7); $\dot{1}$

其中 1 的波长是 $\dot{1}$ 的波长的 2 倍，其相邻两音调波长之比皆为 $\sqrt[12]{2}\approx1.0594631$。

尽管12个音调的波长构成公比为 $\sqrt[12]{2}$ 的等比数列，但人类听觉却认为相邻两音调均相差半个音。

5. 几何、代数、概率…中的斐氏数列

在数字的本身有时也会遇到斐氏数列。比如在几何中有这样一个例子：

已知以 AB 为直径的半圆有一内接正方形 $CDEF$，其边长为 1（如图 2—8）。设 $AC=a$，$BC=b$，作数列：

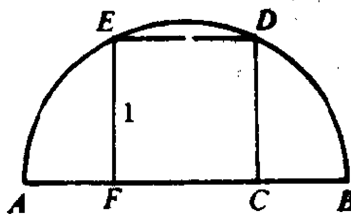


图 2—8

$u_1=a-b$

$u_2=a^2-ab+b^2$

$u_3=a^3-a^2b+ab^2-b^3$

……………………

$u_k=a^k-a^{k-1}b+a^{k-2}b^2-\cdots+(-1)^kb^k$

则 $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ $(n\geqslant3)$，即 $\{u_n\}$ 为斐波那契数

列。

我们只须注意到：

$a-b=AC-BC=FC=1$

$ab=AC\cdot BC=CD^2=1$

则 a、b 为 $x^2-x-1=0$的两个根，解得

$$a=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\quad b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

容易证明：$a^2=1+a$，$b^2=1-b$。

又 $u_k=a^k-a^{k-1}b+a^{k-2}b^2-\cdots+(-1)^kb^k$

$$=\frac{a^{k+1}-(-b)^{k+1}}{a+b}$$

从而 $u_{k-1}+u_{k-2}$

$$=\frac{a^k-(-b)^k}{a+b}+\frac{a^{k-1}-(-b)^{k-1}}{a+b}$$

$$=\frac{a^{k-1}(a+1)-(-b)^{k-1}(-b+1)}{a+b}$$

$$=\frac{a^{k-1}\cdot a^2-(-b)^{k-1}\cdot b^2}{a+b}$$

$$=\frac{a^{k-1}-(-b)^{k+1}}{a+b}$$

$$=u_k$$

注意到：$u_1=a-b=1$，且 $u_2=a^2-ab+b^2=(1+a)-1+(1-b)=2$，及 $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ $(n>1)$，故$\{u_n\}$是斐波那契数列。

我们再来看一个由求方程近似解而得到斐氏数列的例子。

我们用迭代的方法求方程 $x^2+x-1=0$ 的正的近似解。

令 $f(x)=x^2+x-1$. 由 $f(0)=-1<0, f(1)=1>0$, 知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 间有解 x^*。

考虑迭代格式： $x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n+1}$

令 $x_0=1$（称之为第0次迭代），则

$x_1=\dfrac{1}{1+x_0}=\dfrac{1}{2}$（第1次迭代，$x_1$ 称第一次近似根）；

$x_2=\dfrac{1}{1+x_1}=\dfrac{1}{1+1/2}=\dfrac{2}{3}$（第2次迭代）；

$x_3=\dfrac{1}{1+x_2}=\dfrac{1}{1+2/3}=\dfrac{3}{5}$（第3次迭代）；

$x_4=\dfrac{1}{1+x_3}=\dfrac{1}{1+3/5}=\dfrac{5}{8}$（第4次迭代）；

$x_5=\dfrac{1}{1+x_4}=\dfrac{1}{1+5/8}=\dfrac{8}{13}$（第5次迭代）；

………………………

我们已经看到，这些各次近似解：

$\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{8}{13}, \cdots$

的分子、分母都恰好是构成一个斐波那契数列。

最后我们看一个与古典概率问题研究有关的例子.

连续抛一枚硬币，直到连出两次正面为止，今考察事件发生在第n次抛掷的情形:

我们用H表示硬币的正面，而用T表示硬币的反面，从下表可以看出：事件发生在第n次的所有可能的种类数恰为u_{n-1}:

n	可能的序列	序列的数目
2	HH	1
3	THH	1
4	HTHH,TTHH	2
5	THTHH,HTTHH,TTTHH	3
6	HTHTHH, TTHTHH,THTTHH HTTTHH, TTTTHH	5
…	………………	…

对于$n=7$时，只须在$n=6$时的序列每个的前面加上T（共5个），此外还可以在每个T打头的序列前面加上H（共3个），这样一共有5 + 3 = 8个.

仿上利用数学归纳法我们可以证明:

"连续抛一枚硬币，直到连出两次正面为止"的事件发生在第n次抛掷所有可能的方式数为u_{n-1}.

1）$n=2$、3的情形自明。

2）设 $n=k$ 时结论真，即事件发生在第 k 次抛掷的方式数有 u_{k-1} 种，而它是由 u_{k-2}个序列前面各加上 T，在 u_{k-3}个序列（它们是 T 打头）的前面又加上 H 而得到的。

今考虑 $n=k+1$的情形。注意到我们可以在上述 u_{k-1} 个序列前面各加上 T，而在 u_{k-2}个以 T 打头的序列前面各加上 H：

$$\text{T}(\underbrace{\text{T}\cdots\text{THH}}_{k})\text{或 T}(\underbrace{\text{H}\cdots\text{THH}}_{k})\quad(\text{共 } u_{k-1}\text{个})$$

$$\text{H}(\underbrace{\text{T}\cdots\text{THH}}_{k})\qquad\qquad(\text{共}u_{k-2}\text{个})$$

这样，事件发生在第 $k+1$ 次的抛掷方式数共有$u_{k-1}+u_{k-2}=u_k$种，即命题对$n=k+1$也真。

从而，结论对任何自然数 n 都成立。

1984年11月，D. shechtman 等人在极冷的锰—铝合金中拍创第一张准晶体的电子衍射图。在随后得到的高分辨电子显微图中，呈圆环状分布的亮点在直线方向或相间或重叠，而结点分布服从斐氏数列（这个发现冲破了一百多年来建立起来的经典晶体学的现有理论基础），关于它详见文献[28]。

6．小结

我们再来小结一下，可以导致斐波那契数列的问题大致可分为以下三类：

（1）F—数的生物模型（F—数即斐波那契数）

（生物学中所谓“鲁德维格”定律，亦为斐氏数列在植物学中的体现）

（2）道路模型

即沿图2—9所示道路从A_0出发（只能沿箭头方向前进）到A_n的所有可能走法数即为u_n。

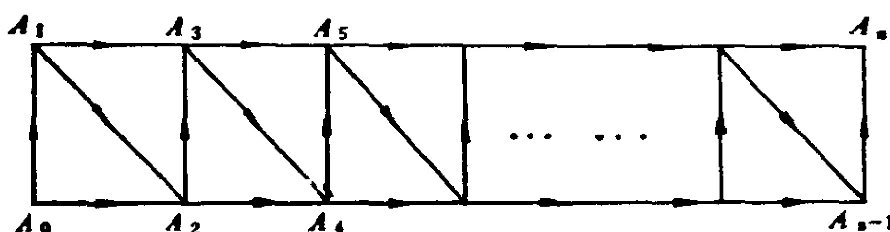


图 2—9

（3）组合模型

数集 $N_n=\{1,2,\cdots,n\}$中不含相邻元素的子集个数即为 u_{n+2}。

今证 H_n 为 N_n 不含相邻元素的子集个数，

显然 $N_1=\{1\}$，其子集仅有空集 ϕ 和$\{1\}$两个，即 $H_1=2$。

$N_2=\{1,2\}$它的满足要求的子集有 ϕ，$\{1\}$和$\{2\}$等3个；即 $H_2=3$。

对 N_n 的任一满足要求的子集 E，若它不含数 n，则它必为$N_{n-1}=\{1,2,\cdots,n-1\}$ 满足要求

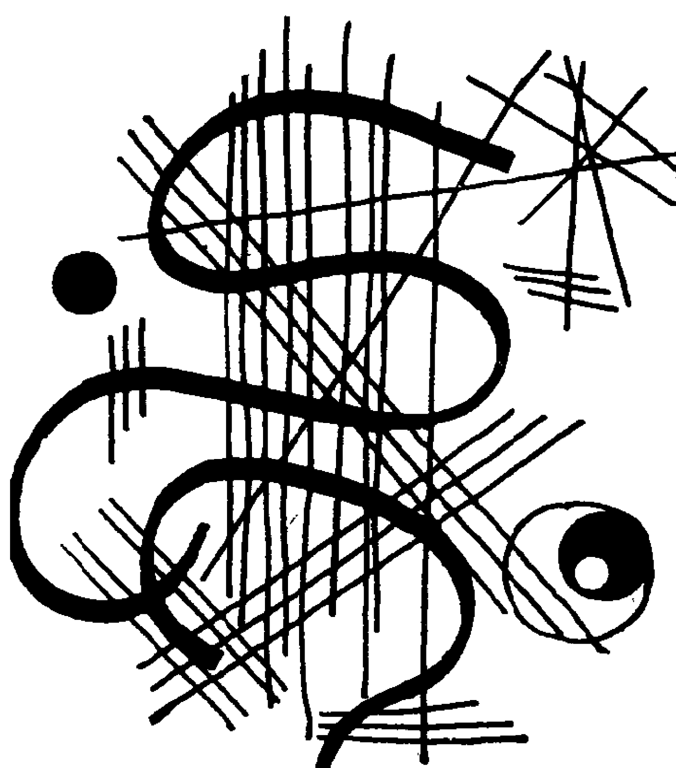
的子集；若 E 包含数 n，则它必不包含 $n-1$，故当我们从 E 中去掉 n 之后得到的乃是 N_{n-2} 的一个满足要求的子集。这表明当我们将 N_n 中所有 H_n 个满足要求的子集按包含 n 元素与否而分作不相交的两类时，它们的个数分别为 H_{n-1}和 H_{n-2}，从而

$$H_n = H_{n-1} + H_{n-2}$$

又 $H_1 = u_3 = 2$，$H_2 = u_4 = 3$，故由它们满足同样递推关系，从而必有

$$H_n = u_{n+2}$$

三 通项的其他表达式



前面我们介绍了斐波那契数列的通项表达式——比内公式：

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

当然它还有其他的通项表达式，下面我们来介绍几种。

1. 行列式形式

斐氏数列的通项可以用下面的行列式表达：

$$u_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (*)$$

式右是一个 n 阶行列式，直接应用数学归纳法去验证并不困难，下面我们先证明一个更一般的结论，然后再用它导出上面的式子，n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, & \alpha\neq\beta \\ (n+1)\alpha^n, & \alpha=\beta \end{cases}$$

$$\text{若令 } d_n=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$\delta_n=\begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

则 $D_n=\delta_n+d_n$，其中

$$d_n=\alpha\begin{vmatrix} 1 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

（第一行乘 − 1 加到第 2 行）

$$=\alpha\begin{vmatrix}1 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$（按第一列展开）

$=\alpha d_{n-1}$

递推地可有：$d_n=\alpha d_{n-1}=\alpha^2 d_{n-2}=\cdots=\alpha^{n-1}d_1$
$=\alpha^n$，

类似地，$\delta_n=\beta\ D_{n-1}$。

综上　$D_n=\alpha^n+\beta\ D_{n-1}$。

同理　$D_{n-1}=\alpha^{n-1}+\beta\ D_{n-2}$。

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$D_2=\alpha^2+\beta D_1$，

$D_1=\alpha+\beta$。

即　$D_n=\alpha^n+\beta\ D_{n-1}$，

$\beta D_{n-1}=\beta\alpha^{n-1}+\beta^2\ D_{n-2}$，

$\beta^2 D_{n-2}=\beta^2\alpha^{n-2}+\beta^3 D_{n-3}$，

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\beta^{n-2}D_2=\beta^{n-2}\alpha^2+\beta^{n-1}D_1$，

$\beta^{n-1}D_1=\beta^{n-1}\alpha+\beta^n$。

将上诸式两边相加、化简后有

$$D_n=\alpha^n+\beta\alpha^{n-1}+\beta^2\alpha^{n-2}+\cdots+\beta^{n-2}\alpha^2+\beta^{n-1}\alpha+\beta^n$$

$$=\begin{cases}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})/(\alpha-\beta), & \alpha\neq\beta\\ (n+1)\alpha^n, & \alpha=\beta\end{cases}$$

在 u_{n+1} 的表达式(*) 中，α、β 满足：

$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$

即 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根，由是若设 $\alpha>\beta$，则

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

再 $\alpha-\beta=\sqrt{5}$，从而

$$u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

这恰好正是比内公式。

注 当然(*)还可以写成它的转置形式：

$$u_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ -1 & 1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & 1 & & 0 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & 0 & & & -1 & 1 & 1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

它曾是苏联大学生数学竞赛的一个试题。

2. 矩阵、向量积的形式

我们再来看它的一个矩阵、向量乘积的表达式。

若设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}v_k\\ u_k\end{pmatrix}=A^k\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

$$(k=1,2,\cdots)$$

则 u_k 恰为斐氏数列的通项。

下面我们来证明这个结论。

A 的特征方程为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-1$，故 A 的特征值为：$\lambda_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，

$\lambda_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$。

而对应于 λ_1、λ_2 的特征向量分别为：

$$\left(1,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^T,\ \left(1,\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^T$$

令 $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1-+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$，则有

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}，及\ A=X\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}X^{-1}$$

则 $A^k=X\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}X^{-1}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1} & \lambda_1^k-\lambda_2^k\\ \lambda_1^k-\lambda_2^k & \lambda_1^{k-1}-\lambda_2^{k-1}\end{pmatrix}$$

由 $\begin{pmatrix}v_k\\ u_k\end{pmatrix}=A^k\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，从而

$$u_k=\frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^k-\lambda_2^k)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

注 这个命题是南京邮电学院1984年研究生入学试题中的一道题目。

3．组合数和的形式

斐波那契数列通项表达式还可通过杨辉（贾宪）三角表示（关于杨辉三角我们后面还要介绍）。我们把杨辉三角

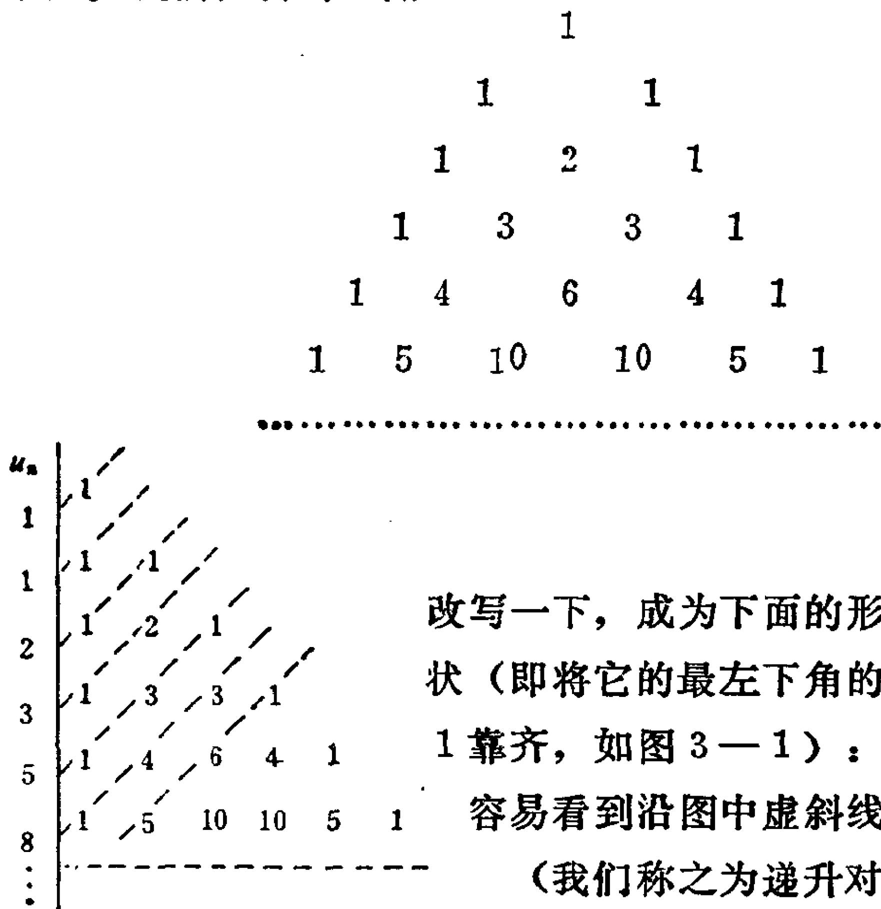


图 3—1

改写一下，成为下面的形状（即将它的最左下角的1靠齐，如图3—1）：容易看到沿图中虚斜线（我们称之为递升对角线）方向（与水

平成 45° 夹角的直线）上诸数和恰好分别是：

1，1，2，3，5，8，……

这也恰好正是斐波那契数列，稍稍分析我们便可以写出它的通项表达式：

$$u_{n+1}=\sum_{i=0}^{k} C^{i}{}_{n-i}，\ 其中\ k=\left[\frac{n}{2}\right]\ (n=0,1,2,3,\cdots)$$

这里〔x〕表示不超过 x 的最大整数，且约定 $C^{0}{}_{n}=1$；$C^{m}{}_{n}=0$，若 $n<m$ 的话。

直观的表示可以通过下面的图 3—2 显现：

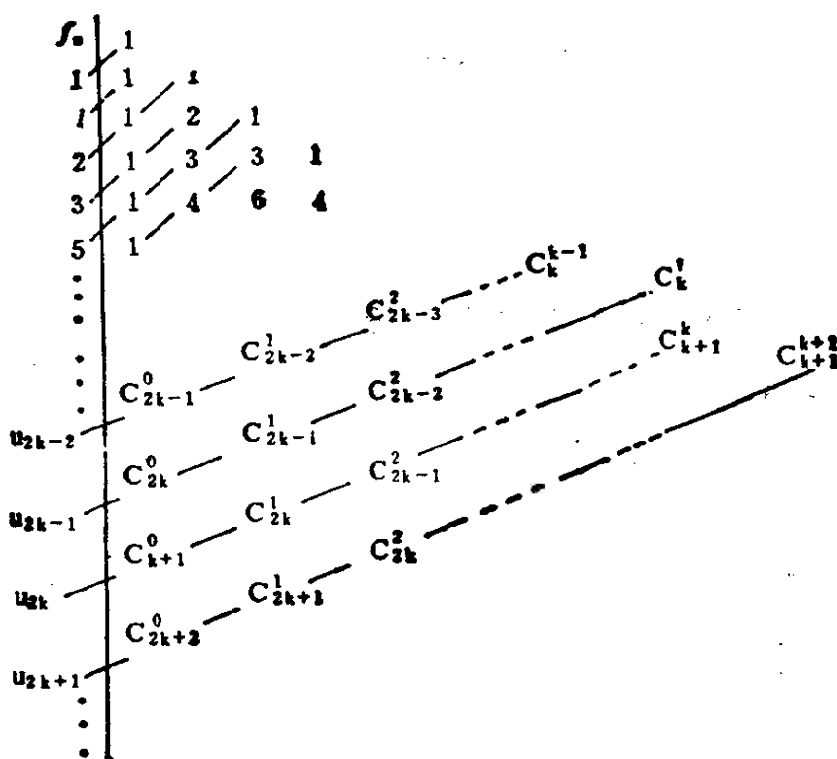


图　3—2

26

从图表中我们已经看到：$f_1=1$，$f_2=1$，余下的只须验证这些斜线上诸数和f_k满足：

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ （$n \geqslant 3$）

粗略地看，位于第 $n-2$ 条递升对角线上的诸数是：

C^0_{n-3}，C^1_{n-4}，C^2_{n-5}，……

位于第 $n-1$ 条递升对角线上的诸数是：

C^0_{n-2}，C^1_{n-3}，C^2_{n-4}，……

而它们的和是：

$$C^0_{n-2} + (C^0_{n-3} + C^1_{n-3}) + (C^1_{n-4} + C^2_{n-4}) + \cdots\cdots$$

注意到组合等式 $C^k_m + C_m^{k+1} = C^{k+1}_{m+1}$，显然上式即为：

$$C^0_{n-1} + C^1_{n-2} + C^2_{n-3} + \cdots\cdots$$

它恰为第 n 条递升对角线上的诸数和 f_n。

更为精细的证明应分 n 为奇数或偶数两种情形考虑：

（1）若 n 是偶数，设 $n = 2k(k = 1, 2, 3, \cdots)$，则

$$f_n = f_{2k} = C^0_{2k+1} + (C^1_{2k} + C^2_{2k-1} + C^3_{2k-2} + \cdots + C^k_{k+1})$$

而 $f_{2k-1} = C^0_{2k} + (C^1_{2k-1} + C^2_{2k-2} + \cdots + C^k_k)$，

$f_{2k-2} = (C^0_{2k-1} + C^1_{2k-2} + C^2_{2k-3} + \cdots + C_k^{k-1})$。

比较三个圆括号内的诸项（分别有 k 项）之间有关系：

$C^r_m = C^r_{m-1} + C^{r-1}_{m-1}(r = 1, 2, \cdots, k; m = 2k, 2k-1, \cdots, k+1)$

又 $C^0_{2k+1} = C^0_{2k}$，故有 $f_{2k} = f_{2k-1} + f_{2k-2}$。

（2）若 n 为奇数，设 $n=2k+1(k=1,2,3,\cdots)$，则

$$f_n=f_{2k+1}=C^0_{2k+2}+(C^1_{2k+1}+C^2_{2k}+\cdots+C^k_{k+2})+C^{k+1}_{k+1}$$

而 $f_{2k}=C^0_{2k+1}+(C^1_{2k}+C^{2k+1}_2+\cdots C^k_{k+1})$，

$$f_{2k}=(C^0_{2k}+C^1_{2k-1}+C^k_{2k-2}+\cdots+C^{k-1}_{k+1})+C_k^k$$

上面三式中圆括号内的 k 个对应项之间有关系：

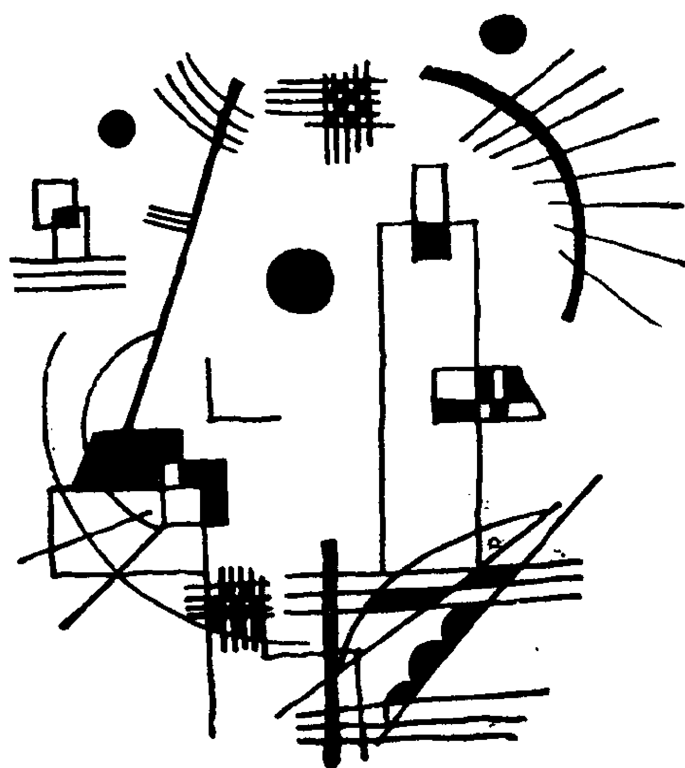
$C^r_m=C^{r-1}_{m-1}+C^r_{m-1}(r=1,2,\cdots,k;\ m=2k+1,2k,\cdots,k+2)$

注意到 $C^0_{2k+2}+C^{k+1}_{k+1}=C^0_{2k+1}+C_k^k$，故 $f_{2k+1}=f_{2k}+f_{2k-1}$。

综上总有 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}(n\geqslant3)$。

此即说 $u_n=f_n$，亦即 f_n 为斐波那契数列通项的一种表示式。

四 斐氏数列是二阶循环数列



对于级数

$t_0+t_1+\cdots+t_n+\cdots$ （*）

若存在一个正整数 k 和 k 个数$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 使得关系式（又称递推公式）：

$$t_{n+k}=\sum_{i=0}^{k}a_i\ t_{n+k-i} \qquad (**)$$

对所有的非负整数n 都成立，则级数叫 k 阶循环（或递归）级数，（**）称 k 阶循环（或递归）方程。

由上及斐氏数列性质：$u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$ 知斐氏数列所组成的级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 是一个二阶循环（或递归）级数。

对于x 的幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}t_k\ x^k$，若存在 k 个数 a_1，$a_2,\cdots$，a_k 使

$$t_{n+k}x^{n+k}=\sum_{i=0}^{k}a_ix^i(u_{n+k-i}x^{n+k-i})$$

对所有非负整数 n 都成立，称该幂级数为 k 阶循环（或递归）级数，且多项式

$$1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k$$

为该级数的特征方程。

若令 $s_n=\sum_{k=0}^{n} t_kx^k$ $(n\geqslant k)$，则

$$(1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k)s_n$$

$$=[t_0+(t_1-a_1t_0)x+(t_2-a_1t_1-a_2t_0)x^2+\cdots+(t_{k-1}-a_1t_{k-2}-a_2t_{k-3}-\cdots-a_{k-1}\ t_0)x^{k-1}]+[(t_k-a_1t_{k-1}-a_2t_{k-2}-\cdots-a_kt_0)x^k+\cdots+(t_k-a_1t_{n-1}-a_2t_{k-2}-\cdots-a_kt_0)x^n]-[\ (a_1u_n+a_2u_{n-1}+\cdots+a_ku_{n-k+1})x^{n+1}+\cdots+a_kt_nx^{n+k}]$$

由循环条件知上面第二方括号内诸项均为 0，从而可有

$$s_n=\{[t_0+(t_1+a_1t_0)x+\cdots+(t_{k-1}-a_1t_{k-2}-\cdots-a_{k-1}t_0)x^{k-1}]-[(a_1t_n+a_2t_{n-1}+\cdots+a_kt_{n-k+1})x^{n+1}+\cdots+a_kt_nx^{n+k}]\}/(1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k)$$

上述级数在其收敛范围内可有

$$s_\infty=[t_0+(t_1-a_1t_0)x+\cdots+(t_{k-1}-a_1t_{k-2}-\cdots-a_{k-1}t_0)x^{k-1}]/(1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k)。$$

若 1 不是其特征多项式 $1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k$ 的根，则在 s_n 和 s_∞ 中置 $x=1$ 可得：

$$\sum_{i=0}^{n} t_i\ 和\sum_{i=0}^{\infty} t_i$$

对斐波那契数列来讲，循环级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k \qquad (***)$$

的特征多项式是 $1-x-x^2$，由上面结论知：

$$s_\infty = \frac{u_0+(u_1-u_0)x}{1-x-x^2} = \frac{1}{1-x-x^2}$$

$$= \frac{1}{(\tau_1-x)(\tau_2-x)}$$

$$= \frac{1/\sqrt{5}}{\tau_1-x} + \frac{1/\sqrt{5}}{\tau_2-x}$$

$$= \frac{2}{5-\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-2x/(\sqrt{5}-1)}$$

$$+ \frac{2}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1+2x/(\sqrt{5}+1)}$$

这里 $\tau_1(\sqrt{5}-1)/2$，$\tau_2=(\sqrt{5}+1)/2$。

由 $\dfrac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\cdots \ (|t|<1)$

有 $$s_\infty = \frac{2}{5-\sqrt{5}}\left(1+\frac{2x}{\sqrt{5}-1}+\frac{2^2x^2}{(\sqrt{5}-1)^2}+\cdots+\frac{2^nx^n}{(\sqrt{5}-1)^n}+\cdots\right)+\frac{2}{5+\sqrt{5}}\left(1-\frac{2x}{\sqrt{5}+1}+\frac{2^2x^2}{(\sqrt{5}+1)^2}+\cdots+\frac{2^nx^n}{(\sqrt{5}-1)^n}+\cdots\right)$$

而其 x^n 的系数恰为 u_n:

$$u_n=\frac{2}{5-\sqrt{5}}\cdot\frac{2^{n-1}}{(\sqrt{5}-1)^{n-1}}+(-1)^{n-1}$$

$$\frac{2}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{2^n}{(\sqrt{5}+1)^{n-1}}$$

$$=\frac{2^n}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{(\sqrt{5}-1)^n}+(-1)^{n-1}\ \frac{1}{(\sqrt{5}+1)^n}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

这正好是比内公式.

顺便讲一句，我们在等式

$$s_n=\frac{u_0+(u_1-u_0)x}{1-x-x^2}-\frac{(u_n+u_{n-1})x^{n+1}+u_nx^{n+2}}{1-x-x^2}$$

中令 $x=1$,则可有

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=2u_n+u_{n-1}-1=u_{n+2}-1$$

这一点我们后面还要证明它.

我们还可以用差分方程的办法求出比内公式来. 显然斐氏数列适合差分方程

$$f(x+2)=f(x+1)+f(x)$$

用 $f(x)=Ar^x$ 代入可得

$$r^2-r-1=0$$

解之得 $r_1=(1+\sqrt{5})/2$, $r_2=(1-\sqrt{5})/2$.

故 $f(x)=A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x+A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x$,

因 $f(0)=0$，$f(1)=1$ 得：

$$\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ A_1\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+A_2\cdot\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=0 \end{cases}$$

解得　$A_1=1/\sqrt{5}$，$A_2=-1/\sqrt{5}$。

从而　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right]$。

应该讲一句：上面的方法具有普遍性。比如我们可以求广义斐波那契数列（有时也称鲁卡斯数列）：

(1) $u_1=a$，$u_2=b$，$u_n=u_{n-1}+u_{n+2}$ $(n>2)$，其中 a、b 为给定的常数；

(2) $u_1=a$，$u_2=b$，$u_n=\alpha u_{n-1}+\beta u_{n-2}$($n>2$，其中 α、β 为给定的常数)。

的通项公式或前 n 项和。

我们还可以证明：

k 阶循环（递归）数列 $t_1,t_2\cdots$，$t_n,\cdots$ 的递推公式

$$t_{n+k}=a_1t_{n+k-1}+a_2t_{n+k-2}+\cdots+a_kt_n$$

今求其通项问题，即求整标函数方程

$$f(n+k)=a_1f(n+k-1)+a_2\ f(n+k-2)+\cdots+a_kf(n) \qquad (*)$$

满足初始条件：

$$f(r)=t_r \quad (1\leqslant r\leqslant k)$$

的解，我们可有：

若 x_i $(1\leqslant i\leqslant k)$是 k 阶循环级数$\{t_n\}$ 特征多项式 $x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}-\cdots-a_k$的 k 个不相等的根，则$\{t_n\}$的通项

$$a_n=f(n)=\sum_{i=1}^{k}c_ix^n{}_i$$

其中 $c_i(1\leqslant i\leqslant k)$由方程组

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{k}c_ix_i=t_1\\ \sum\limits_{i=1}^{k}c_ix^2{}_i=t_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum\limits_{j=1}^{k}c_ix_i{}^k=t_k\end{cases} \qquad (**)$$

唯一确定。

我们先证明：若$f_i(n)$是(＊)的解$(1\leqslant i\leqslant m)$，则对任何常数 $c_i(1\leqslant i\leqslant m)$，

$$f(n)=\sum_{j=1}^{m}c_if_i(n)$$

也是(＊)的解。

只须将 $f(n)$直接代入(＊)即可。

下面我们寻求（*）的形如 $f(n)=x^n$ 的不恒为零的特解，其中 x 为待定常数。

将 $f(n)=x^n$ 代入（*）有：

$$x^{n+k}=a_1x^{n+k-1}+a_2x^{n+k-2}+\cdots+a_kx^n$$
$$=x^n(a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_k)$$

两边同除以x^n（它不为 0，因 $a_k\neq0$，故$x=0$不是（*）的解）有：

$$x^k=a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_k$$

此即说：$f(n)=x^n$ 是（*）的非零解的充要条件是 x 是$\{t_n\}$特征方程的根.

考虑方程组（**）的系数行列式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^k & x_2^k & \cdots & x_k^k \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{k}x_i\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

它恰为范德蒙行列式，因诸 $x_i(1\leqslant i\leqslant k)$互不相同，故 $\Delta\neq0$，从而方程组（**）有唯一组解。

此方程组即为给出的初始条件：

$$f(r)=t_r\ \ (1\leqslant r\leqslant k)$$

由前面的结论知：当 c_i 由方程组（**）确定时

$$a_n=f(n)=\sum_{i=1}^{k}c_ix_i^n$$

即为 k 阶循环（递归）数列$\{t_n\}$的通项表达式。

为了求 k 阶循环（递归）级数和，我们还可以证明下面的结论：

k 阶循环（递归）数列 $t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots$，若其递推公式为

$$t_{n+k}=a_1t_{n+k-1}+a_2t_{n+k-2}+\cdots+a_kt_n$$

又若令 $s_n=t_1+t_2+\cdots+t_n$，则 $s_1,s_2,\cdots,s_n,\cdots$是 $k+1$阶循环（或递归）数列，且递推公式为：

$$s_{n+k+1}=(1+a_1)s_{n+k}+(a_2-a_1)s_{n+k-1}+\cdots+(a_k-a_{k-1})s_{n+1}-a_ks_n$$

事实上，$t_1=s_1$，$t_2=s_2-s_1,\cdots$，$t_n=s_n-s_{n-1}$ $(n\geqslant2)$，代入递推公式即

$$s_{n+k}-s_{n+k-1}=a_1(s_{n+k-1}-s_{n+k-2})+a_2(s_{n+k-2}-s_{n+k-3})+\cdots+a_k(s_n-s_{n-1})$$

即 $$s_{n+k}=(1+a_1)s_{n+k-1}+(a_2-a_1)s_{n+k-2}+\cdots+(a_k-a_{k-1})s_n-a_ks_{n-1}$$

用 $n+1$ 代 n 即得所要证的结论。

我们用此结论再求一下斐氏数列的前 n项和 s_n。

由上，$s_1,s_2,\cdots,s_n$ 是三阶循环（递归）数列，且适合：

$$s_{n+3}=2s_{n+2}-s_n$$

易知其特征多项式为 x^3-2x^2+1，它的根为

$$x_1=1,x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

我们知道 s_n 的通项可为：

$$s_n = c_1 + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_3\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

又 $s_1 = u_1 = 1$，$s_2 = u_1 + u_2 = 2$，$s_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 4$，代入上式可有：

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}c_2 + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}c_3 = 1 \\ c_1 + \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 c_2 + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 c_3 = 2 \\ c_1 + \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 c_2 + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 c_3 = 4 \end{cases}$$

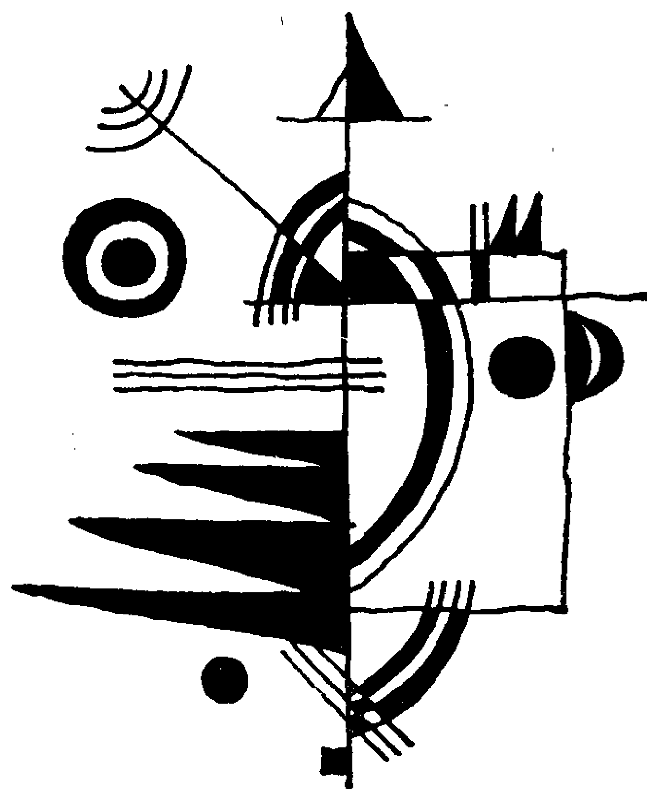
解得　$c_1 = -1$，$c_2 = \dfrac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}$，$c_3 = \dfrac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$，

$$\text{故}\quad s_n = -1 + \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] - 1$$

即　$s_n = u_{n+2} - 1$。

五 斐氏数列的数论性质



斐波那契数列的一些数论的性质，也引起人们的兴趣，人们对斐氏数列的研究从某种意义上讲可以说是从它的数论性质开始的。我们考察：

1,1,**2**,**3**,**5**,8,**13**,21,24,55,**89**，144，**233**，377,610,987,**1597**,…

中，黑体数为质数。

首先人们或许会问：斐氏数列中有多少质数？

到目前为止，人们只知道 $n=3$，4，5，7，11，13，17，23，29，43，47时，u_n 是质数，其中

$$u_{47}=2,971,215,073$$

人们尚不知道斐氏数列中还有无其它质数？更不知道斐氏数列中是否有无穷多个质数。

对于某些广义斐氏数列，人们也曾进行其中质数项的考察工作，比如鲁卡斯数列：

$$v_1=1,\ v_2=3,\ v_{n+1}=v_n+v_{n-1}\ (n\geqslant 2)$$

即 1,**3**,4,**7**,**11**,18,**29**,**47**,76,123，**199**，322，**521**,843,1364,…

人们知道，当 $n=2$，4，5，7，8，11，13,17，

19，31，37，41，47，53，61，71时，v_n 是质数，其中

$v_{71}=688,846,502,588,399$

除此之外，v_n 中还有无其他质数？v_n 中是否有无穷多个质数？这都未得出定论。

对于u_n 和 v_n 中最大质因数$p(u_n)$和 $p(v_n)$，斯特瓦特证明存在正的常数 A_1 和 A_2，使

$$p(u_n)\geqslant A_1\frac{n\lg n}{[q(n)]^{4/3}},\qquad n=3,\ 4,\ \cdots$$

$$p(v_n)\geqslant A_2\frac{n\lg n}{[q(n)]^{4/3}},\qquad n=3,\ 4,\ \cdots$$

这里 $q(n)$ 表示 n 的无平方因数的因数个数。

对于更一般的鲁卡斯—拉赫曼数列：对于互质的任意前两项 u_1，u_2，由满足 $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ $(n>2)$ 产生的递推数列，格拉海姆证明：取

$u_1=1786\ 772701\ 928802\ 632268\ 75\ 130$
455793，

$u_2=1059\ 683225\ 053015\ 111058\ 16\ 5141$
686995

产生的广义斐氏数列中完全不含质数。

下面我们来证明斐氏数列的其他数论性质。

我们先来证明第一节中提到的关系式

$$u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2=(-1)^n$$

的推广形式：

1. $u_{n-k}\ u_{m+k}-u_nu_m=(-1)u_{m-n-k}\ u_k$。

只要注意到关系式

$$(x^{n+k}-y^{n+k})(x^{m-k}-y^{m-k})-(x^n-y^n)(x^m-y^m)$$
$$=(xy)^n(x^{m-n-k}-y^{m-n-k})(x^k-y^k)$$

再令 $x=\tau_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$y=\tau_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$；

且等式两边同时除以 $5=(\sqrt{5})^2$ 即可（注意比内公式）。

2. 若 $m\mid n$，则 $u_m\mid u_n$；反之若 $u_m\mid u_n$，则 $m\mid n$（即 $m\mid n \Longleftrightarrow u_m\mid u_n$）。

今设 $n=mm_1$，对 m_1 进行数学归纳法。

1) $m_1=1$，则 $n=m$，结论显然。

2) 若假定 m_1 时成立，即 $u_m\mid u_{mm_1}$，今考虑 m_1+1 的情形。

由 $u_{m(m_1+1)}=u_{mm_1+m}=u_{mm_1-1}u_m+u_{mm_1}u_{m+1}$，而 $u_m\mid u_{mm_1-1}\ u_m$，又由归纳假设知 $u_m\mid u_{mm_1}$。

故 $u_m\mid u_{m(m_1+1)}$，即对 m_1+1 时命题亦真。从而对任何自然数 m_1 结论均成立。

反之，若 $u_m\mid u_n$，则 $(u_m,\ u_n)=u_m$。

由鲁卡斯定理 $(u_m,\ u_n)=u_{(m,n)}$，故有

$u_m=u_{(m,n)}$

即 $m=(m,\ n)$，从而 $m\mid n$。

由上面结论我们显然还有：

若 $m\mid u_n$，则 $m\mid u_{kn}$ $(k=2,\ 3,\ \cdots)$。

即若$m|u_n$，则有无穷多个斐波那契数也可被m整除。

由上我们知道若 $m|n$，则 $u_m|u_n$，它如何显式表达？胡久稔曾给出下式：

3．若 $n=mr$（m、r 不为 1），则

$$\frac{u_n}{u_m}=\sum_{i=0}^{r-1}C_r^i\ u_m^{r-(i+1)}\ u_{m-1}^i u_{m-i}$$

我们不难用数学归纳法证明：

若 α 是方程 $x^2-x-1=0$的根，则$\alpha^n=u_n\alpha+u_{n-1}$（$n=2，3，\cdots$）。

这样我们可以有：

$\alpha^n=u_n\alpha+u_{n-1}$，$\alpha^m=u_m\alpha+u_{m-1}$

$$\alpha^{mr}=(u_m\alpha+u_{m-1})^r=\sum_{i=0}^{r}C_r^i u_m^{r-i}\alpha^{r-i}u_{m-1}^i \qquad (*)$$

由 $C_r^i\ u_m^{r-i}u_{m-1}^i\alpha^{r-i}$

$=C_r^i u_m^{r-i}\ u_{m-1}^i\ (u_{r-i}\alpha+u_{r-i-1})$

$=C_r^i u_m^{r-i}u_{m-1}^i u_{r-i}\alpha+C_r^i u_m^{r-i}u_{m-1}^i u_{r-i-1}$

又因为 $\alpha^{mr}=\alpha^n=u_n\alpha+u_{n-1}$ $\qquad(**)$

由 α 是无理数，比较（＊）与（＊＊）式的系数有

$$u_n=\sum_{i=0}^{r-1}C_r^i u_m^{r-i}\ u_{m-1}^i u_{r-i}$$

故 $\frac{u_n}{u_m}=\sum_{i=0}^{r-1} C^i{}_r u_m{}^{r-(i+1)} u^i{}_{m-1} u_{r-i}$.

下面我们证明一个有趣的结论：

4．对任何正整数 m，在前 m^2 个斐波那契数中必有一个可被 m 整除。

若令 $\tilde{K}$ 表示 m 被 k 除后的余数，今考虑下面的数对：

$$(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2),(\tilde{u}_2,\tilde{u}_3),(\tilde{u}_3,\tilde{u}_4),\cdots,(\tilde{u}_n,\tilde{u}_{n+1}),\cdots \quad (*)$$

我们规定(a_1, b_1)、(a_2, b_2)当且仅当 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$时相等。

注意到，用 m 除后所得余数组成的不同数对，只有 m^2 个（由抽屉原理）。

今设$(\tilde{u}_k, \tilde{u}_{k+1})$ 为上述数对中第一个重复的数对，今证明它只能是$(1,1)$。

事实上，若不然，即 $k>1$，又在$(*)$中

$(\tilde{u}_l,\tilde{u}_{l+1})=(\tilde{u}_k, u_{k+1})$，其中 $l>k$。

因 $u_{l-1}=u_{l+1}-u_l$，$u_{k-1}=u_{k+1}-u_k$，

而 $\tilde{u}_{l+1}=\tilde{u}_{k+1}$，$\tilde{u}_l=\tilde{u}_k$，

则 $\tilde{u}_{l-1}=\tilde{u}_{k-1}$(即 $u_{l-1}\equiv u_{k-1} \pmod{m}$)

故 $(\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k)=(\tilde{u}_{l-1},\tilde{u}_l)$，可见数对$(\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k)$是较$(\tilde{u}_k, \tilde{u}_{k+1})$更早出现重复的数对，这与前设相抵！

从而 $k>1$的假设不真，仅有 $k=1$，即$(1,1)$

是首先出现重复的数对．若设它在第 t 个位置上重复（$1<t<m^2+1$），即

$(\tilde{u}_t,\ \tilde{u}_{t+1})=(1,\ 1)$ 或 $u_t\equiv u_{t+1}\pmod m$

即 $m\mid(u_{t+1}-u_t)$，又 $u_{t+1}-u_t=u_{t-1}$，则 $m\mid u_{t-1}$。

注 这儿只是说在前 m^2 个斐波那契数中，必有一个能被 m 整除（存在性），但并没能确定它在什么位置，即数列中第几个数。

5．若 p 是奇质数，则 $u_p\equiv 5^{(p-1)/2}\pmod p$。

首先我们可以证明：

$$2^n u_n=2\sum_{k奇}C^k{}_n 5^{(k-1)/2}$$（k奇 表示只对奇数项求和）

这只须要注意到：

$2^n\sqrt{5}\,u_n=(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n$

再由二项式定理展开，且注意到正负项的相消即可．

又由费尔马定理，若 p是质数则

$2^{p-1}\equiv 1\pmod p$

再注意到 $C^k{}_p\equiv 0\pmod p$，$1\leqslant k\leqslant p-1$，则可有

$u_p\equiv 5^{(p-1)/2}\pmod p$

6．p 是质数，且 $p\neq 5$，则 u_{p-1} 和 u_{p+1}之一（不都是）是 p的倍数。

若 $p=2$，则它显然真。

若 $p\neq 2$，由 $u_{p-1}u_{p+1}-u_p^2=-1$，再由上面5的结论及 $2^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ 知 $u_{p-1}\ u_{p+1}\equiv 0 \pmod p$。

又 $u_{p+1}=u_p+u_{p-1}$，故 u_{p-1} 和 u_{p+1} 两者之一为 p的倍数。

7．一个斐波那契数除以另外一个斐波那契数的余数，仍是正、负斐波那契数，即

$$u_{mn+r}\equiv\begin{cases} u_r, & m\equiv 0 \pmod 4 \\ (-1)^{r+1}u_{n-r}, & m\equiv 1 \pmod 4 \\ (-1)^n u_r, & m\equiv 2 \pmod 4 \\ (-1)^{r+1+n}u_{n-r}, & m\equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \pmod{u_n}$$

这只须注意到关系式：

$u_{m+n}=u_m u_{n+1}+u_{m-1}u_n$。

$u_{n-k}u_{m+k}-u_n u_m=(-1)^n u_{m-n-k}\ u_k$

即可，以 u_n 为模的斐波那契同余数列是：

$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ u_{n-1},\ 0,\ u_{n-1},\ -u_{n-2},\cdots$

8．$u_n^2+u_{n+1}^2=u_{2n+1}$。

9．$u_{n+1}^2-u_{n-1}^2=u_{2n}$。

10．$u_{n+1}^3+u_n^3-u_{n-1}^3=u_{3n}$。

以上三式只须用比内公式或由 $u_{m+n}=u_{n-1}u_m+u_n u_{m+1}$证明即可。

比如 $m=n$，我们有 $u_{2n}=u_{n-1}u_n+u_n u_{n+1}=u_n(u_{n-1}+u_{n+1})=(u_{n+1}-u_{n-1})(u_{n+1}+u_{n-1})=u_{n+1}^2$

$-u^2_{n-1}$.

同样地，取 $m=2n$ 可以证明结论10。

最后我们想谈谈斐氏数列中的完全平方数问题。

11．斐氏数列中除 $u_1=u_2=1$和 $u_{12}=144$ 是完全平方数外，再无其它完全平方数。

这个问题最初由罗莱特提出，韦德林利用电子计算机于1963年，对$n\leqslant 10^6$ 的数进行了核验。后由科恩、威勒及我国四川大学柯召教授等解决（1964年）。

关于它的证明详见文献〔12〕，我们这儿简要摘述一下：

引1　方程 $x^2+4=5y^4$ 除 $x=y=1$外，无其它正整数解。

引2　方程 $x^2+1=2y^4$ 只有正整数解$x=y=1$；$x=239$，$y=13$。

引3　$n\geqslant 3$，设 $f(x)$是 n 次无重根的有理整系数多项式，a是非零整数，则方程$ay^2=f(x)$只有有限组整数解。

引4　方程 $x^4-y^4=2z^4$ 无正整数解。

由之可以证明下面的定理：

定理1　方程 $x^4+4=5y^2(*)$，除$x=y=1$；$x=y=2$外，无其它正整数解。

证　显然 x，y 同奇偶。分两种情况讨论：

（1） x、y 同为奇数时，则方程（*）可化为：

$(x^2+2)^2-(2x)^2=5y^2$

有　$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=5y^2$

因　$(x^2-2x+2,\ x^2+2x+2)=1$，则上式给出：

$x^2\pm 2x+2=5u^2$ …①，$x^2\mp 2x+2=v^2$ …②，$uv=y$ …③。

其中第②式给出：$(x\mp 1)^2=v^2-1$，即

$(v+x\mp 1)\ (v-x\pm 1)=1$

故仅有正整数解 $x=v=1$，代入第①式仅有 $u=1$，此时给出 $x=y=1$。

（2） x,y 同为偶数，令 $x=2u$，$y=2v$代入（*）有 $4u^4+1=5v^2$，令 $t=2u^2$，可有：

$$t^2-5v^2=-1 \qquad (**)$$

由前式知 v 为奇数，故（**）的全部正整数解 t、v 可表为：

$t+v\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^{2n+1}, n=0,\ 1,\ 2,\cdots$

故　$2t=(2+\sqrt{5})^{2n+1}+(2-\sqrt{5})^{2n+1}$

即　$(2u)^2=(2+\sqrt{5})^{2n+1}+(2-\sqrt{5})^{2n+1}$。

若令 $\omega=\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$，$\bar{\omega}=\dfrac{2-\sqrt{5}}{2}$，则 $\omega^3=2+\sqrt{5}$，$\bar{\omega}^3=2-\sqrt{5}$，故上式可为：

$(2u)^2=\omega^{3(2n+1)}+\bar{\omega}^{3(2n+1)}=(\omega^{2n+1}+\bar{\omega}^{2n+1})\cdot(\omega^{2(2n+1)}+\bar{\omega}^{2(2n+1)}+1)$

对非负整数 k，$\omega^k+\bar{\omega}^k$ 是正整数。

由$(\omega^{2n+1}+\overline{\omega}^{2n+1},\omega^{2(2n+1)}+\overline{\omega}^{2(2n+1)})\mid 3$，故$3\times u$。

故上式给出：

$\omega^{2(2n+1)}+\overline{\omega}^{2(2n+1)}+1=\alpha,\omega^{2n+1}+\overline{\omega}^{2n+1}=\beta$，$\alpha\beta=2u$

显然可设 $\alpha=\omega^{2n+1}+\bar{\omega}^{2n+1}+a,(a\in J)$，故由

$(\omega^{2n+1}+\overline{\omega}^{2n+1}+a)^2=\omega^{2(2n+1)}+\overline{\omega}^{2(2n+1)}+1$

有

$a^2+2a(\omega^{2n+1}+\bar{\omega}^{2n+1})=3$

显然仅当 $a=1$，$n=0$和 $a=-3$，$n=0$是上式的解. 此时给出$\alpha=\pm 2$，$\beta=\pm 1$，即 $u=v=1$，故 $x=y=2$。

定理2 对固定的整数 $m>1$，满足 $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n(n\geqslant 1)$ 的整循环级数中只包含有限个m方次数。

证 由满足 $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ $(n\geqslant 1)$ 的整循环级数可表为：

c_1+c_2，$c_1\alpha+c_2\beta$，$c_1\alpha^2+c_2\beta^2$，$\cdots$

其中 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$。

故 $c_1=\dfrac{u_2-u_1\beta}{\sqrt{5}}$，$c_2=\dfrac{u_1\alpha-u_2}{\sqrt{5}}$

则 $u_n=\dfrac{u_2-u_1\beta}{\sqrt{5}}\alpha^{n-1}+\dfrac{u_1\alpha-u_2}{\sqrt{5}}\beta^{n-1}$

注意到 $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$有：

$$5u_n^2-(u_2\alpha^{n-1}+u_1\alpha^{n-2}+u_2\beta^{n-1}+u_1\beta^{n-2})^2$$

$$=4(-1)^{n-1}\ (u_1^2+u_1u_2-u_2^2)$$

又对任何非负整数 n，$\alpha^n+\beta^n$ 是一个整数，故 u_n 适合 z 的方程：

$$5z^2-x^2=4\cdot(-1)^{n-1}(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)$$

若 $u_n=y^m$，$m>1$，则有

$$5y^{2m}-x^2=4\cdot(-1)^{n-1}(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)\quad(\triangle)$$

设 $f(x)=5x^{2m}-4\cdot(-1)^{n-1}(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)$

则 $f'(x)=10mx^{2m-1}$

因仅当 $u_1=u_2=0$时， $u_1^2+u_1u_2+u_2^2=0$。故 u_1，u_2，$u_1^2+u_1u_2+u_2^2$ 不为 0 。

故 $f(x)$ 无重根。由引理 3 知($\triangle$)式仅有有限组整数解。

下面我们证明除 $u_1=u_2=1$，$u_{12}=144$以外，u_n 不是平方数。

证 由($\triangle$)式可有

$$5y^4-x^2=4\cdot(-1)^{n-1}$$

由 n 的奇偶性不同可分别给出：

$5y^4-x^2=4\cdots$（1）和$5y^4-x^2=-4\cdots$（2）。

由引理 1 知，（1）仅有正整数解 $x=y=1$，（2）式给出 $x_1\equiv1(\text{mod }2)$，$y=2y_1$，

$$x_1^2+1=20y_1^4$$

因 $(x_1-1，x_1+1)=2$，故上式给出

$$x_1+1=10u^4,\ x_1-1=2v^4 \qquad (3)$$

$$x_1+1=2v^4,\ x_1-1=10u^4 \qquad (4)$$

由（3）消去 x_1 得 $5u^4-v^4=1$，取模 8 知其无解。

由（4）消去 x_1 得 $5u^4-v^4=-1$，即 $(v^2-1)(v^2+1)=5u^4$，$u\equiv 0 \pmod 2$，$v\equiv 1 \pmod 2$，故 $(v^2+1,\ v^2+1)=2$，再由上式若

$v^2-1=2t^4, v^2+1=40s^4$ 和 $v^2-1=10t^4,\ v^2+1=8s^4$。

因 $v\equiv 1 \pmod 2$，故 $2\equiv 0 \pmod 8$。因而只有

$$v^2-1=8t^4,\ v^2+1=10s^4, s\equiv 1 \pmod 2 \quad (5)$$

或

$$v^2-1=40t_1^4, v^2+1=2s_1^4, s_1\equiv 1 \pmod 2 \quad (6)$$

由（5）有 $(v-1)(v+1)=8t^4$，$v\equiv 1 \pmod 2$，故

$$v-1=2\alpha^4, v+1=4\beta^4, \alpha\equiv 1 \pmod 2 \qquad (7)$$

或

$$v-1=4\alpha_1^4, v+1=2\beta_1^4, \beta_1\equiv 1 \pmod 2 \quad (8)$$

由（7）消去 v 有 $2\beta^4-\alpha^4=1$，由引理 2 知它只有正整数解 $\alpha=\beta=1$。此时 $v=3$ 给出：

$$u_{12}=144$$

由（8）消去 v 有 $\beta_1^4-2\alpha_1^4=1$，由引理 4 知其无正整数解。

对于（6）由引理1知，仅有正整数解 $v=s_1=1$ 和 $v=239$，$s_1=13$，$v=1$ 得 $u=0$。但 $u_n=0$（$n\geqslant1$）不妥，$v=239$不是解。

若 $x\equiv1 \pmod 2$，则 $(x+2, x-1)=1$，由（2）给出：

$$x+2=5u^4,\ x-2=v^4 \qquad (9)$$

或

$$x+2=v^4, x-2=5u^4 \qquad (10)$$

由（9）消去 x 得 $5u^4-v^4=4$，由引理1知其仅有正整数解 $u=v=1$，此时给出 $u_2=1$。

由（10）消去 x 得 $5u^4-v^4=-4$，其解适合 $u\equiv v\equiv1 \pmod 2$，将方程取模16有：

$$8\equiv0 \pmod{16}$$

故无整数解适合此方程。

我们这儿还想指出一点，对于上述问题（斐氏数列中完全平方数的存在问题），胡久稔曾给出一个更简洁的证明，详见文献〔24〕。

其证明大意是：基于斐氏数列的下述性质：

（1）$u_{2k}=u^2_{k+1}-u^2_{k-1}$；

（2）$u_{2k+1}=u_k^2+u^2_{k+1}$；

然后讨论 u_n。分两种情形：

1. $n=2k$ 时，由 $u_{2k}=u^2_{k+1}-u^2_{k-1}$，若存在自然数 p 使 $u_{2k}=p^2$，即

$$u^2_{k+1}-u^2_{k-1}=p^2$$

或 $u^2_{k-1}=(u_{k+1}+p)(u_{k+1}-p)$.

令 e 为 u_{k-1} 的一个因子，则可能的解是：

$$\begin{cases} u_{k-1}e=u_{k+1}+p \\ u_{k-1}/e=u_{k+1}-p \end{cases}$$

其中 $e\mid u_{k-1}, 1\leqslant e\leqslant u_{k-1}$。故

$$u_{k+1}=\left(u_{k-1}e+\frac{u_{k-1}}{2}\right)/2$$

枚举 e 为1，2，…，6及讨论 $e\geqslant 7$，除 $e=5$外均不妥，而 $e=5$ 时，得$u_{12}=144$。

2．$n=2k+1$时，由 $u_{2k+1}=u^2_k+u^2_{k+1}$，若其可表为 p^2 有

$$u_{2k+1}=p^2$$

$$u_k^2=p^2-u^2_{k+1}=(p-u_{k+1})(p+u_{k+1})$$

则

$$u_{k+1}=\left(u_ke+\frac{u_k}{e}\right)/2$$ 其中$1\leqslant e\leqslant u_k$，且 $e\mid u_k$。

枚举 $e=1$，2，…，5及 $e\geqslant 6$均矛盾。

如前面我们曾指出的那样，斐氏数列某些性质尚未解决（如数列中有无最大质数，即质数是否有限问题），再比如：

以 n 为下标的斐波那契数具有某一个预先给定的质数 p 作为它的因子，我们知道 $n\leqslant p^2$，更

确切地 $n \leqslant p+1$。再进一步有：

若 p 是 $5k \pm 1$ 形质数时， $p \mid u_{p-1}$；

若p是 $5k \pm 2$ 形质数时，$p \mid u_{p+1}$。

但具有固有因数（若质数 $p \mid u_n$，且 $p \nmid u_k$ $(k<n)$，则称 p 为 u_n 的固有因数）的斐波那契数，它的下标可用怎样的公式表示？人们尚不清楚。

（利用稍复杂的工具还可以证明，所有的斐波那契数，除 u_1，u_2，u_6 和 u_{12} 外，都至少含有一个固有因数）

又如，古希腊人把形如 $n(n+1)/2$ 的整数称为三角数，它是基于当时的毕达哥拉斯学派的人们数按它们用石子摆成的形状所决定，比如他们把形如图 5—1：

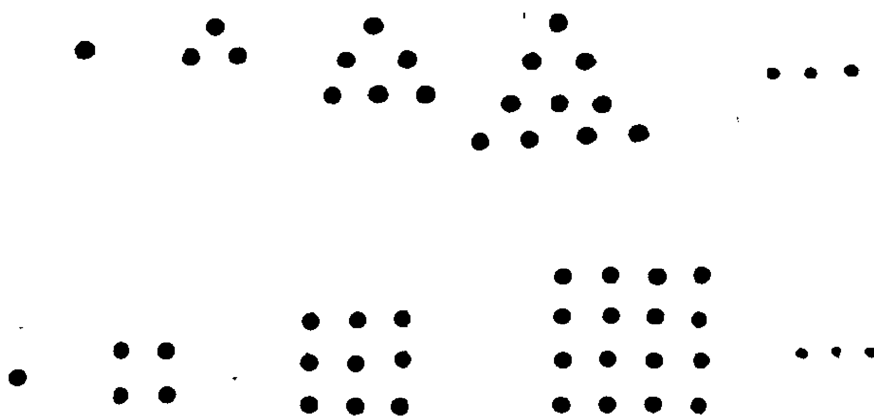


图 5—1

的数分别称为三角数、四角数，它们的通项表达式分别为 $n(n+1)/2$和n^2等（四角数即完全平方

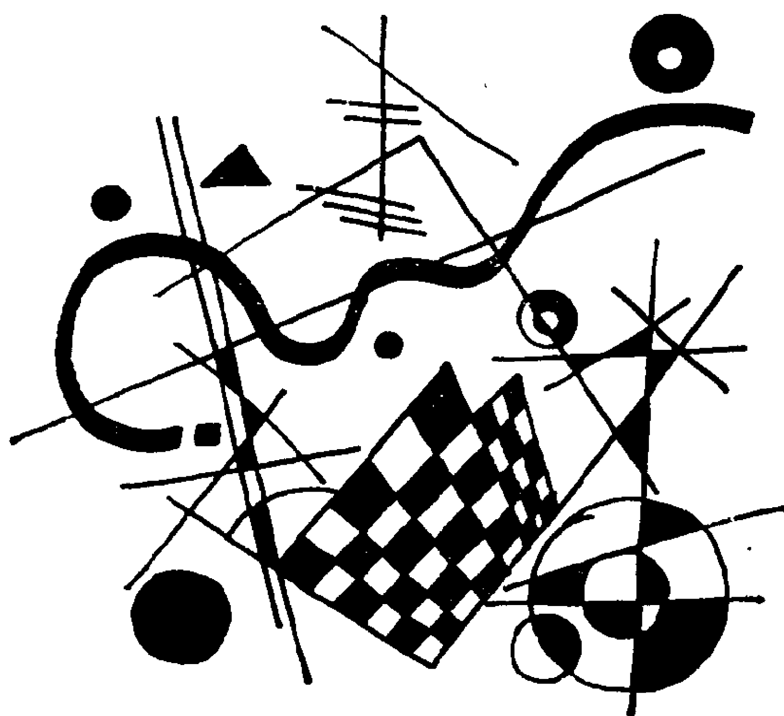
数）.这些统称为多角数．多角数有许多有趣的性质，其中最著名的莫过费尔马的猜测（1637年）：

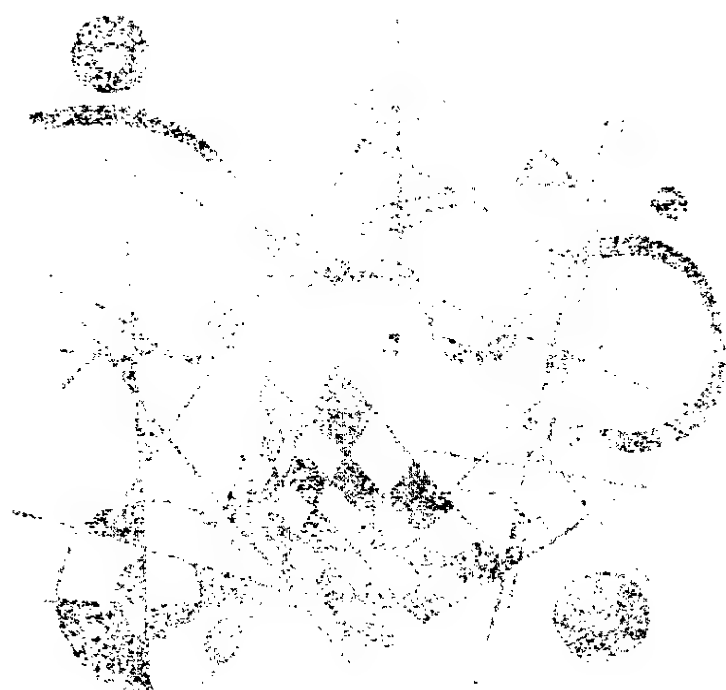
任何自然数可用不超过 k 个 k 角数和来表示。

许多著名的数学家都曾对此证明作出过贡献。比如欧拉、拉格朗日、雅谷比（证明了$k=4$的情形）、高斯（证明了$k=3$的情形）等，它的一般情形的证明是数学家哥西于1815年完成的．

对于多角数的这些问题我们估且不论，前面我们证明：在斐氏数列中，除1、144这两个四角数（即完全平方数）外，不存在其他的四角数．对于三角数1、3、6、10、15、21、…在斐氏数列中的出现是有限还是无限（显然1、3、21出现在斐氏数列中）？这个问题亦未获解决．

六　斐氏数列的其他性质

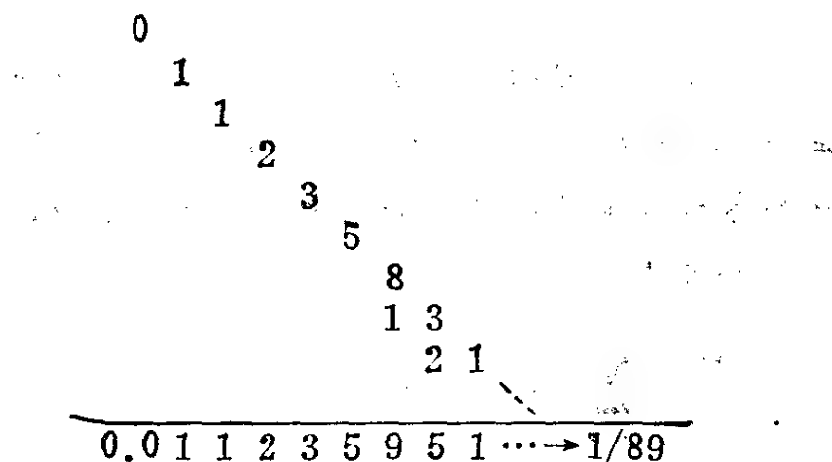




斐氏数列的性质很多（前面我们也曾叙述过一些），下面我们再来列举其中的某些。

1．与循环小数的联系

（1）将斐氏数列按下图那样逐个退后一位加起来，且添上小数点，则它是一个循环小数，且它的值是1/89。



（2）将斐氏数列中的诸数一隔一地取出，再象上面那样逐个退后一位再相加，添上小数点也构成一个循环小数，它的值是1/71。

```
 0
  1
   3
    8
    2 1
      5 5
         ⋱
─────────────────────
0.0 1 4 0 6 ⋯→1/71
```

（3）将斐氏数列逐个后退两位，再把它们加起来，添上小数点，即是一个值为1/9899的循环小数。

```
 00
   01
     01
       02
         03
           05
             ╲
──────────────────────
0.000101020305⋯→1/9899
```

（4）一般地，在斐氏数列中从 u_b 开始，每隔 a 项取出一项，得到一个子序列，将此子序列各数逐步退后 k位加起来，添上小数点，则它的和可表为：

$$\frac{M}{N}=\sum_{n=0}^{\infty} u_{an+b}\cdot 10^{-k(n+1)}$$

$$=\frac{10^k u_b+(-1)^b u_{a-b}}{10^{2k}-10^k(\tau_1{}^a+\tau_2{}^a)+(-1)^a}$$

这里 $\tau_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$， $\tau_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$。

由比内公式

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau_1{}^n-\tau_2{}^n\right) \quad =\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\tau_1{}^n-\tau_2{}^n\right)$$

将之代入

$$\frac{M}{N}=\sum_{n=0}^{\infty}u_{an+b}\cdot 10^{-k(n+1)}$$

有 $$\frac{M}{N}=\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left[\ \tau_1{}^b\cdot 10^{-k}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\tau_1{}^a}{10^k}\right)^n\right.$$

$$\left.-\ \tau_2{}^b\ \cdot 10^{-k}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\tau_2{}^a}{10^k}\right)^n\ \right]$$

且当 $\left|\frac{\tau_1{}^a}{10^k}\right|<1,\left|\frac{\tau_2{}^a}{10^k}\right|<1$时上式右收敛。

因 $|\tau_2|<1$，故 $\left|\frac{\tau_2{}^a}{10^k}\right|<1$ 恒成立。

余下只须$\left|\frac{\tau_1{}^a}{10^k}\right|<1$ 即可。即 a、k 满足

$$\tau_1{}^a<10^k$$

即可，因$10<\tau_1{}^5$，有$10^k<\tau_1{}^{5k}$，故$a<5k$。这时

$$\frac{M}{N}=\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left[\ \tau_1{}^b\cdot 10^{-k}\cdot 1/\left(1-\frac{\tau_1{}^a}{10^k}\right)\right.$$

$$\left.-\ \tau_2{}^b\cdot 10^{-k}\cdot 1/\left(1-\frac{\tau_2{}^a}{10^k}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left[\frac{\tau_1{}^b}{10^k-\tau_1{}^a}-\frac{\tau_2{}^b}{10^k-\tau_2{}^b}\right]$$

$$=\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\cdot\frac{10^k(\tau_1{}^b-\tau_2{}^b)-\tau_1{}^b\tau_2{}^a+\tau_1{}^a\tau_2{}^b}{10^{2k}-10^k(\tau_1{}^a+\tau_2{}^b)+(-1)^a}$$

$$=\frac{10^k u_b-(-1)^a u_{b-a}}{10^{2k}-10^k(\tau_1{}^a+\tau_2{}^b)+(-1)^a}$$

或 $$\frac{10^k u_b+(-1)^b u_{a-b}}{10^{2k}-10^k(\tau_1{}^a+\tau_2{}^b)+(-1)^a}.$$

显然前面诸式中：

（1）$a=1$，$b=0$，$k=1$；

$$\frac{N}{M}=\frac{u_1}{10^2-(\tau_1+\tau_2)\cdot 10-1}=\frac{1}{89}.$$

（2）$a=2$，$b=0$，$k=1$；

$$\frac{M}{N}=\frac{u_2}{10^2-(\tau_1{}^2+\tau_2{}^2)\cdot 10+1}=\frac{1}{71}.$$

（3）$a=1$，$b=0$，$k=2$；

$$\frac{M}{N}=\frac{u_1}{10^4-(\tau_1+\tau_2)\cdot 10^2-1}=\frac{1}{9899}.$$

2. 倒数性质

若 k是偶数，则$\frac{1}{u_k}=\frac{1}{u_{k+1}}+\frac{1}{u_{k+2}}$
$+\frac{1}{u_k u_{k+1} u_{k+2}}$.

我们只须证明下面的结论即可：

若 p 是自然数，p^2+1是一个质数，则有唯

一的 p_1、p_2 使

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p+p_1}+\frac{1}{p+p_2}+\frac{1}{p(p+p_1)(p+p_2)}$$

成立。

更确切地即方程 $\frac{1}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{pxy}$ 有唯一解的充要条件是 p^2+1 是质数。

不失一般性，令 $y>x$ (注意 $y=x$ 不是方程的解，由方程可有 $xy=px+py+1$，则 x，y，p 两两互质)，无妨设 $y=x+k(k>0)$。

故 $xy=px+py+1$，

即 $x(x+k)=px+p(x+k)+1$。

或 $x^2+(k-2p)x-(pk-1)=0$。

若其有整数解，则其判别式

$\varDelta=k^2+4p^2+4$

是完全平方数．即对任何 p 存在 k 和 s 使

$k^2+4p^2+4=s^2$

故 $4(p^2+1)=s^2-k^2=(s+k)(s-k)$ $(*)$

而 s^2-k^2 是偶的，则 s、k 必为同奇偶.

若 p^2+1 是质数，当 $p\neq 1$ 时，由上式有

$$\begin{cases}2(p^2+1)=s+k\\ 2=s-k\end{cases}$$

解得 $s=p^2+2$，$k=p^2$，代入原方程可解得

$x=p+1$

从而 $y=x+k=p^2+p+1$，方程有唯一解满足：

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p^2+p+1}$$

$$+\frac{1}{p(p+1)(p^2+p+1)} \qquad (**)$$

若 $p=1$ 时，则 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$，结论也真。

又若 p^2+1 不是质数，令 $p^2+1=p_1p_2$，且 $p_2>p_1$ $(p_1\neq p_2)$。由(*)有

$4p_1p_2=(s+k)(s-k)$

则 $\begin{cases}2p_1p_2=s+k,\\ 2\quad\;\;=s-k;\end{cases}$ 及 $\begin{cases}2p_2=s+k,\\ 2p_1=s-k.\end{cases}$

解后者可有：$s=p_1+p_2$，$k=p_2-p_1$，代入原方程可得：

$x=p_1+\sqrt{p_1p_2-1}=p_1+p$

且 $x=p_2+\sqrt{p_1p_2-1}=p_2+p$.

故它除了有(＊＊)形式的解外还有

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p+p_1}+\frac{1}{p+p_2}+\frac{1}{p(p_1+p)(p_2+p)}$$

$$(***)$$

下面回到斐氏数列来，由于当 k 是偶数时，

$u_k^2+1=u_{k-1}u_{k+1}$

代入(＊＊＊)式有

$$\frac{1}{u_k}=\frac{1}{u_k+u_{k-1}}+\frac{1}{u_k+u_{k+1}}$$

$$+\frac{1}{u_k(u_k+u_{k-1})(u_k+u_{k+1})}$$

$$=\frac{1}{u_{k+1}}+\frac{1}{u_{k+2}}+\frac{1}{u_k\ u_{k+1}u_{k+2}}$$

下面我们再给出它的一个几何解释。

在一个从左端开始而右端可以无限延长的并连单位正方形中，如图6—1把标有自然数 1，2，3，…，n，… 的点连接产生一个角序列：

α_1，α_2，α_3，…，α_n，…

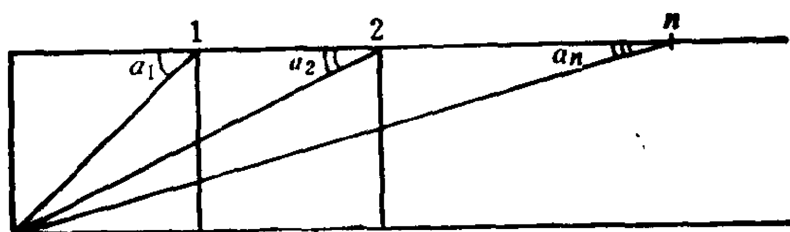


图 6—1

则方程 $\frac{1}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{pxy}$ 的解 (p, x, y)在角序列中有关系式

$\alpha_p=\alpha_x+\alpha_y$

则对斐氏数列来讲，若 k是偶数，则

$\alpha(u_k)=\alpha(u_{k-1})+\alpha(u_{k+1})$

这只须注意到 $\alpha_n=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{n}$ 即可。

注1 这个几何解释可视为下面命题的推广：

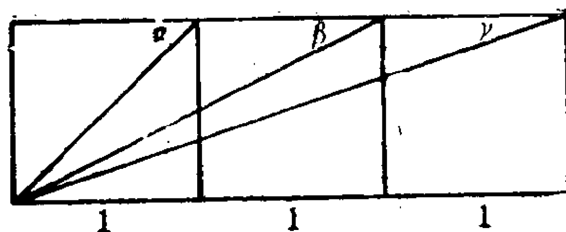


图 6—2

如图6—2，三个正方形并列，则$\alpha=\beta+\gamma$。

注2　由于不定方程解的个数是$\frac{1}{2}\varphi(p^2+1)$，其中$\varphi(x)$表示$x$的不同因子个数，则结合前述几何事实有：

给定自然数n，可知α_n有多少种不同方法表示成该角序列中两个角之和。

3. 斐氏数的尾数组成的数列

由斐波那契数的尾数组成的数列是循环的。

显然有数列：1，1，2，3，5，8，3，1，…中两个奇数项和一个偶数项交替出现，总共有$5\times5=25$对由奇数数字组成的有序数对，故不多于$3\times25=75$次连续相加后，这些奇数对之一出现重复，且开始一个新的循环。

因为两数之和（或差）是唯一的，故这对重复出现的数应当和数列开始的那对奇数相同，且不与中间的一对奇数相同（可用反证法去证）。

实际上，只须六十项便出现循环，它们是：

1，1，2，3，5，8，3，1，4，5，9，4，3，7，0，7，7，4，1，5，6，1，7，8，5，3，8，1，9，0，9，9，8，7，5，2，7，9，

6, 5, 1, 6, 7, 3, 0, 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1, 0, 1, 1, …

注 对于满足递推关系

$$a_{n+k}=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+k-1}$$

的任何数列，也有和上面类似的结论。

4. 斐波那契数串

设 $s_1=$"a"，$s_2=$"b"，且 $s_{n+2}=s_{n+1}s_n$，$n>0$。换言之，s_{n+2} 是通过把 s_n 放在 s_{n+1} 的右边形成的数串，比如 $s_3=$"ba"，$s_4=$"bab"，$s_5=$"$bab\,ba$"等。

显然 s_n 有 u_n 个字母，它没有双重（即连续出现）的a，也没有三重的 b，且 s_n 含有u_{n-2}个a，u_{n-1}个b。

又若 $m-1=u_{k_1}+u_{k_2}+\cdots+u_{k_r}$，其中$k_1\geqslant k_2+2\geqslant k_3+2\geqslant\cdots\geqslant k_r+2\geqslant 2$，则 $m<n$ 时：

s_n 的第 m 个字母是 a，当且仅当 $k_r=2$；

s_n 的第 m 个字母是 b，当且仅当$\left[(k+1)\dfrac{1}{\tau_1}\right]-\left[k\dfrac{1}{\tau_1}\right]=1$，这儿$[x]$表示不超过 x 的最大整数。

且在前 k 个字母中，b的个数是$\left[(k+1)\dfrac{1}{\tau_1}\right]$.

5．斐波那契数的三角形

是否存在以斐波那契数为边长的三角形？

答案是否定的，注意到斐氏数列中数间关系：

$u_1=u_2=1$，$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$

今取斐氏数列中三项 $u_l\leqslant u_m\leqslant u_n$，考虑它们可否组成三角形。

注意到 $u_n\geqslant u_l+u_m$，这与三角形一边小于其它两边和的定理相违背，从而它们不能组成一个三角形。

6．斐波那契数的四面体

一个四面体的四个顶点坐标分别是：(u_n, u_{n+1}, u_{n+2})，$(u_{n+3}, u_{n+4}, u_{n+5})$，$(u_{n+6}, u_{n+7}, u_{n+8})$，$(u_{n+9}, u_{n+10}, u_{n+11})$。求该四面体体积。

由斐氏数列满足 $u_{k+2}=u_k+u_{k+1}$，从而该四面体的各个顶点坐标都满足：

$x+y=z$ 即 $x+y-z=0$

这说明该四面体四个顶点都在上述平面内，从而它的体积为０。

七 某些斐氏数列之和





数列求和自然是研究数列性质的一个重要内容。利用斐氏数列的性质及其通项表达式，我们可以求某些斐氏数列的和。

1. $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$ （前 n 项和公式）。

证 $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (u_{k+2} - n_{k+1})$(注意前后项相消)

$$= u_{n+2} - u_1 = u_{n+2} - 1.$$

注 这个性质我们还可直接由斐氏数列的组合模型出发去证如：

我们把 $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$中所有不包含相邻元素的子集称为间隔型子集，$u_{n+2}$ 为 N_n 的所有间隔型子集的数目。

以$\mathscr{C}$记 N_n 的所有间隔型子集所成的集合类似子集为元素所组成的集合），且以这类子集中所出现的最大元为 k 来对$\mathscr{C}$进行分类：

以 E_k 记$\mathscr{C}$ 的这样的子集类：E_k 是由最大元为 k 的所有间隔型子集所组成，于是它将$\mathscr{C}$分成 n 个互不相交的子类，且有下面的等式：

$$\mathscr{C} = \{\phi\} \cup \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} E_k$$

若记 $|E|$ 表示集合 E 的元素个数，则有

$$u_{n+2} = |\mathscr{C}| = 1 + \sum_{k=1}^{n} |E_k|$$

显然 $E_1 = E_2 = 1$，对于 $k>2$，当将 E_k 中每个间隔型子集的元素 k 去掉之后恰好是 N_{k-2} 的一个间隔型子集，故 $|E_k| = u_k$，代入上式即

$$u_{n+2} = 3 + \sum_{k=3}^{n} |E_k| = 3 + \sum_{k=3}^{n} u_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k$$

此外，我们还可以用这种方法证明斐氏数列的其他性质，比如 $u_{m+n} = u_{n-1}u_{m-1} + u_n u_m$.

我们只须从集合 $N_{n+m} = \{1, 2, \cdots, n-1, n, n+1, \cdots, n+m\}$出发考虑，记其间隔型子集类为 $\mathscr{C}_1$，将其元按含不含 n 划分两类 E_1、E_2、因若包含 n 势必不包含 $n-1$ 和 $n+1$，故将 n 去掉后再按小于和大于 n分成两个集合，得到的恰是 $\{1, 2, \cdots, n-2\}$和$\{n+2, \cdots, n+m\}$两个间隔型子集，故 $|E_1| = u_{n-1}u_{m-1}$；

对 E_2 中每个元素按小于或大于 n 直接可分成$\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 和 $\{n+1, \cdots, n+m\}$两个间隔型子集，故有 $|E_2| = u_n u_m$.

综上即有 $u_{n+m} = u_{n-1}u_{m-1} + u_n u_m$.

2. $\sum_{k=1}^{n} u_{2k-1}=u_{2n}$（奇数项和公式）．

证 $\sum_{k=1}^{n} u_{2k-1}=u_1+\sum_{k=2}^{n} u_{2k-1}\quad(u_1=u_2)$

$$=u_2+\sum_{k=2}^{n}(u_{2k}-u_{2k-2})$$

$$=u_2+u_{2n}-u_2=u_{2n}.$$

3. $\sum_{k=1}^{n} u_{2k}=u_{2n+1}-1$ （偶数项和公式）．

证 由上面两结论我们有

$$\sum_{k=1}^{n} u_{2k}=\sum_{k=1}^{2n} u_k-\sum_{k=1}^{n} u_{2k-1}$$

$$=(u_{2n+2}-1)-u_{2n}=u_{2n+1}-1.$$

4. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}u_k=(-1)^{n+1}u_{n-1}+1$（交错或正负相间和）．

证 由 2 和 3 的结论我们可有：

$$\sum_{k=1}^{n} u_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n} u_{2k}=u_{2n}-(u_{2n+1}-1)=-u_{2n-1}+1$$

上式两边再加上 u_{2n+1} 有：

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n} u_{2k}=u_{2n+1}-u_{2n-1}+1=u_{2n}+1$$

综上有 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}u_k=(-1)^{n+1}u_{n-1}+1$。

5. $\sum\limits_{k=1}^{n}u_{3k}=\dfrac{1}{2}(u_{3n+2}-1)$ （三倍数项和）

证 由比内公式

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau_1^{\,n}-\tau_2^{\,n}\right)$$

这里 $\tau_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$， $\tau_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$。

故 $$\sum_{k=1}^{n}u_{3k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau_1^{\,3k}-\tau_2^{\,3k}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=1}^{n}\tau_1^{\,3k}-\sum_{k=1}^{n}\tau_2^{\,3k}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\tau_1^{\,3n+3}-\tau_1^{\,3}}{\tau_1^{\,3}-1}-\frac{\tau_2^{\,3n+3}-\tau_2^{\,3}}{\tau_2^{\,3}-1}\right)$$

由 $\tau_k^3-1=\tau_k^2+\tau_k-1=(\tau_k+1)+\tau_k-1=2\tau_k$ $(k=1,2)$，故

$$\sum_{k=1}^{n}u_{3k}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\tau_1^{\,3n+3}-\tau_1^{\,3}}{2\tau_1}-\frac{\tau_2^{\,3n+3}-\tau_2^{\,3}}{2\tau_2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\tau_1^{\,3n+2}-\tau_1^{\,2}-\tau_2^{\,3n+2}-\tau_2^{\,2}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1^{3n+2}-\tau_2^{3n+2}}{2}-\frac{\tau_1^2-\tau_2^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(u_{3n+2}-u_2)$$

$$=\frac{1}{2}(u_{3n+2}-1)$$

6. $\sum_{k=1}^{n}u_k^2=u_nu_{n+1}$ （平方和）．

证　由前面我们讲过的公式

$$u_k^2=u_ku_{k+1}-u_ku_{k-1}$$

故　$$\sum_{k=1}^{n}u_k^2=u_1^2+\sum_{k=2}^{n}u_k^2$$

$$=u_1u_2+\sum_{k=2}^{n}(u_ku_{k+1}-u_ku_{k-1})$$

$$=u_nu_{n+1}\text{（注意前后项相消）}$$

7. $\sum_{k=1}^{n}u_k^3=\frac{1}{10}[u_{3n+2}+(-1)^{n+1}6u_{n-1}+5]$。

证　由　$$u_k^3=\left(\frac{\tau_1^k-\tau_2^k}{\sqrt{5}}\right)^3$$

$$=\frac{1}{5}\frac{\tau_1^{3k}-3\tau_1^{2k}\tau_2^k+3\tau_1^k\tau_2^{2k}-\tau_2^{3k}}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{\tau_1^{3k}-\tau_2^{3k}}{\sqrt{5}}-3\tau_1^k\tau_2^k\frac{\tau_1^k-\tau_2^k}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{1}{5}[u_{3k}-(-1)^k3u_k]\quad(\tau_1\tau_2=-1)$$

$$=\frac{1}{5}[u_{3k}+(-1)^{k+1}3u_k]$$

故 $$\sum_{k=1}^{n} u_k^3=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}[u_{3k}+(-1)^{k+1}3u_k]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\sum_{k=1}^{n} u_{3k}+3\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}u_k\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left\{\frac{u_{3n+2}-1}{2}+3[(-1)^{n+1}u_{n-1}+1]\right\}$$

$$=\frac{1}{10}[u_{3n+2}+(-1)^n 6u_{n-1}+5]$$

8. $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)u_k=u_{n+4}-(n+3)$.

这个结论只是后面我们所要讲到的性质的特例。

9. (1) $\sum_{k=1}^{2n-1} u_k u_{k+1}=u_{2n}^2$,

(2) $\sum_{k=1}^{2n} u_k u_{k+1}=u_{2n+1}^2-1$.

由公式 $u_{n+m}=u_{n-1}u_m+u_n u_{m+1}$ 我们可有：

$u_{n-1}u_n+u_n u_{n+1}=u_{2n}$

用它不难证得上面的结论。

10. $\sum_{k=1}^{n} C_n^k u_{m+k}=u_{m+2n}$.

我们只须先来证明一个更一般的结论。

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k\ u^k{}_t\ u_{t-1}{}^{n-k}\ u_{m+k} = u_{m+tn}$$

证 $$\sum_{k=1}^{n} C^k{}_n u_t{}^k u_{t-1}{}^{n-k}\ u_{m+k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n} C_n^k\ u_t{}^k u_{t-1}{}^{n-k} (\tau_1{}^{m+k} - \tau_2{}^{m+k})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n} C_n^k\ (\tau_1{}^m\ u_t{}^k u_{t-1}{}^{n-k} \tau_1{}^k - \tau_2{}^m u_t{}^k u_{t-1}{}^{n-k} \tau_2{}^k)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \Big[\tau_1{}^m \sum_{k=1}^{n} \tau_1{}^k u_t{}^k u_{t-1}{}^{n-k} - \tau_2{}^m \sum_{k=1}^{n} \tau_2{}^k u_t{}^k u_{t-1}{}^{n-k} \Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} [\tau_1{}^m (\tau_1 u_t + u_{t-1})^n - \tau_2{}^m (\tau_2 u_t + u_{t-1})^n]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau_1{}^m \cdot \tau_1{}^{nt} - \tau_2{}^m \cdot \tau_2{}^{nt})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau_1{}^{m+n}{}_t - \tau_2{}^{m+nt})$$

$$= u_{m+nt}$$

显然，$t=2$时即为10的结论。

我们再来看一个以u_n为系数的幂级数求和公式。

11. $\sum_{k=1}^{n} u_k x^k =$

$$\begin{cases} \dfrac{x^{n+1}u_{n+1} + x^{n+2}u_n - x}{x^2 + x - 1}, & x^2 + x - 1 \neq 0, \\[2ex] \dfrac{(n+1)x^n u_{n+1} + (n+2)x^{n+1}u_n - 1}{2x+1}, & x^2 + x - 1 = 0. \end{cases}$$

证 考虑到$(x^2 + x - 1)\sum_{k=1}^{n} u_k x^k$

$$= x^2\sum_{k=1}^{n} u_k x^k + x\sum_{k=1}^{n} u_k x^k - \sum_{k=1}^{n} u_k x^k$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-2} u_k x^{k+2} + u_{n-1}x^{n+1} + u_n x^{n+2}\right)$$

$$+ \left(u_1 x^2 + \sum_{k=2}^{n-1} u_k x^{k+1} + u_n x^{n+1}\right)$$

$$- \left(u_1 x + u_2 x^2 + \sum_{k=3}^{n} u_k x^k\right)$$

$$= (u_1 x^2 - u_1 x - u_2 x^2)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-2} (u_k + u_{k+1} - u_{k+2}) x^{k+2}$$

$$+ (u_{n-1} + u_n) x^{n+1} + u_n x^{n+2}$$

$$= -x + u_{n+1} x^{n+1} + u_n x^{n+2}$$

故 若 $x^2 + x - 1 \neq 0$，则有：

$$\sum_{k=1}^{n} u_k x^k = \frac{u_{n+1}x^{n+1} + u_n x^{n+2} - x}{x^2 + x - 1}$$

若 $x^2+x-1=0$，则 $x=1/\tau_1$ 或 $x=1/\tau_2$，直接计算可有：

$$\sum_{k=1}^{n} u_k x^k = \frac{(n+1)u_{n+1}x^n + (n+2)u_n x^{n+1} - 1}{2x+1}$$

我们知道组合数 C_n^k还可以记成$\binom{n}{k}$，它的计算公式是：

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}$$
$$= \prod_{1\leqslant j\leqslant k}\left(\frac{n-k+j}{j}\right)$$

我们可以仿此定义斐波那契组合数：

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \frac{u_n u_{n-1}\cdots u_{n-k+1}}{u_k u_{k-1}\cdots u_1} = \prod_{1\leqslant j\leqslant k}\left(\frac{u_{n-k+j}}{u_j}\right)$$

比如 $n\leqslant 6$时，我们可有斐波那契组合数表（我们规定 $u_0=0$）：

n	$\left(\binom{n}{0}\right)$	$\left(\binom{n}{1}\right)$	$\left(\binom{n}{2}\right)$	$\left(\binom{n}{3}\right)$	$\left(\binom{n}{4}\right)$	$\left(\binom{n}{5}\right)$	$\left(\binom{n}{6}\right)$
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	0
3	1	2	2	1	0	0	0
4	1	3	6	3	1	0	0
5	1	5	15	15	5	1	0
6	1	8	40	60	40	8	1

有趣的是表中主对角线“╲”下方的一系列数恰为斐波那契数列中的数！

斐波那契数（列）的 m 次幂的序列满足一个递推关系——它依赖于其前边的 $m+1$ 项，比如：

$$u_n^2-2u_{n+1}^2-2u_{n+2}^2+u_{n+3}^2=0$$

一般地我们可有：

12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\left(\binom{m}{k}\right)(-1)^{[(m-k)/2]}u_{n+k}^{m-1}=0$，这里

$[x]$表示不超过 x 的最大整数。

证 对m用数学归纳法。

1) $m=1$ 结论显然。

2) 设 $m-1$ 时命题真，今考虑m的情形：

(a) $$\sum_k\left(\binom{m}{k}\right)(-1)^{[(m-k)/2]}u_{n+k}^{m-2}u_k$$

$$=u_m\sum_k\left(\binom{m-1}{k-1}\right)(-1)^{[(m-k)/2]}u_{n+k}^{m-2}=0;$$

(b) $$\sum_k\left(\binom{m}{k}\right)(-1)^{[(m-k)/2]}u_{n+k}^{m-2}(-1)^k u_{m-k}$$

$$=u_m\sum_k\left(\binom{m-1}{k}\right)(-1)^{[(m-1-k)/2]}u_{n+k}^{m-2}\cdot(-1)^m=0;$$

注意到 $u_{k-1}u_m-u_ku_{m-1}=(-1)^ku_{m-k}$，故有

$$(c)\ \sum_{k}\left(\binom{m}{k}\right)(-1)^{\lceil (m-k)/2 \rceil} u_{n+k}^{m-k} u_{k-1} = 0;$$

再由 $u_{n+k} = u_{k-1}u_n + u_k u_{n+1}$ 及(a)、(c)即可推得m时的结论。

我们容易证明拉伯耳特级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}\ (|x|<1) \qquad (*)$$

绝对收敛，事实上我们只须注意到：

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^n}{1-x^{2n}} + \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}} \qquad (**)$$

且由当 $|x|<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 绝对收敛，据阿贝尔判别法，以单调递减且有下界的因子$\frac{1}{1-x^{2n}}$乘此级数的对应项所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}}\ (|x|<1) \qquad (***)$$

也绝对收敛。

同理，再以单调递减有界因子 x^n 乘级数(＊＊＊)对应的项所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1-x^{2n}} \quad (|x|<1)$$

也绝对收敛。

故级数(＊)绝对收敛于 $|x|<1$（或由当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=|x|<1$ 知级数(＊)当 $|x|<1$ 时绝对收敛，这里 $a_n(x)$ 为(＊)的通项)．我们若记级数(＊)为 $L(x)$，则可以证明：

13. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{u_{2k}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{21}+\frac{1}{51}+\cdots=\sqrt{5}\left[L\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\right]$.

这只须注意到表示斐氏数列通项的比内公式：

$$u_k=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

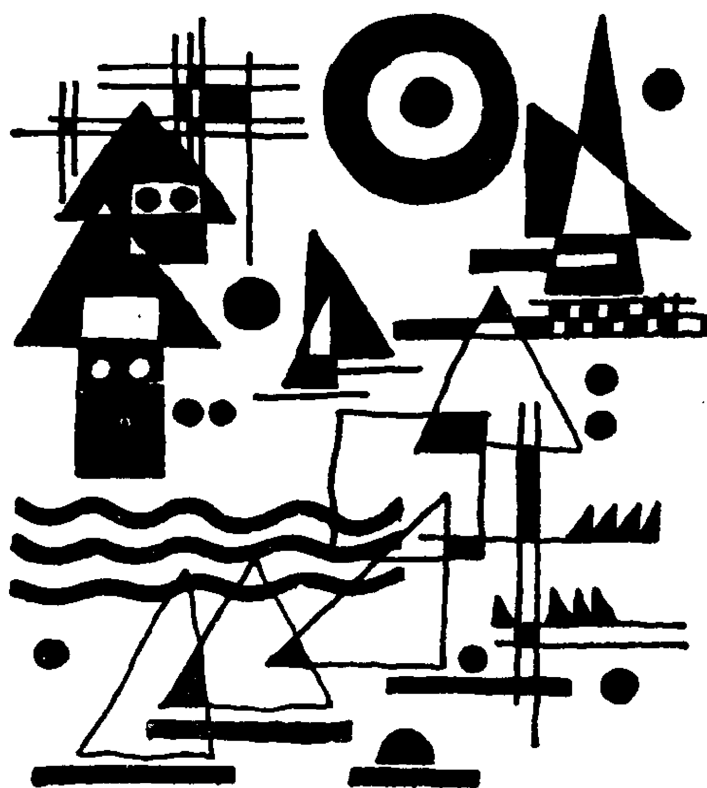
其中 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两根即可。

由此我们还可以有：

若记 $s_1=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{u^2_{2k-1}}$，$s_2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{u_{2k}}$，则 $\frac{s_1}{s_2}=\sqrt{5}$。

此外，我们还可以证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{u_{2k-1}}$ 收敛，进而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{u_k}$ 收敛。

八 斐氏数列与连分数



前面我们曾提到：1753年，希姆松发现斐氏数列中前后两项 u_n 与 u_{n+1} 之比 u_n/u_{n+1} 是连分数

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

的第 n 个渐近分数，这是斐氏数列与连分数联系的第一个发现。

我们知道，斐氏数列

$u_1=u_2=1$，$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$

这样，利用辗转相除法可将 u_{n+1}/u_n 化为连分数形式：

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_n+u_{n-1}}{u_n}=1+\frac{u_{n-1}}{u_n}=1+\cfrac{1}{\cfrac{u_n}{u_{n-1}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{u_{n-2}}{u_{n-1}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}}}}=\cdots=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots\cfrac{}{1+\cfrac{1}{1}}}}$$

为了后面的叙述，我们先来复述一下连分数的某些性质。

连分线 $\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$ 常记为：

$$a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

这里 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正整数，a_0 是非负整数，且称 a_0，a_1，…，a_n 为该连分数的部分商。且称

$$a_0,\quad a_0 + \frac{1}{a_1},\quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}},\ \cdots$$

为该连分数的第一、第二、第三、…渐近分数，

若 $\dfrac{P_0}{Q_0} = \dfrac{a_0}{1}$，$\dfrac{P_1}{Q_1} = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$，

$$\frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}},\ \cdots\cdots,\ \frac{P_n}{Q_n} = \alpha$$

则连分数有下述性质：

（1）$P_{k+1} = P_k a_{k+1} + P_{k-1}$；

（2）$Q_{k+1} = Q_k a_{k+1} + Q_{k-1}$；

（3）$P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} = (-1)^k$。

我们用数学归纳法证明这些式子。

1) $k=1$时，$\frac{P_1}{Q_1}=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1}$，

注意到 $(a_1, a_0a_1+1)=1$，则$\frac{a_0a_1+1}{a_1}$是即约分数，从而

$P_1=a_0a_1+1$，$Q_1=a_1$

又 $\frac{P_2}{Q_2}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=\frac{a_0(a_1a_2+1)+a_2}{a_1a_2+1}$

由 $(a_0(a_1a_2+1)+a_2, a_1a_2+1)=(a_2, a_1a_2+1)=(a_2, 1)=1$，故上面分式亦为即约分数。从而

$P_2=a_0(a_1a_2+1)+a_2=(a_0a_1+1)a_2+a_0$

$=P_1a_2+P_0$

且 $Q_2=a_1a_2+1=Q_1a_2+Q_0$，及 $P_2Q_1-P_1Q_2=(-1)^1=-1$ 成立。

2）今设 $P_{k+1}=P_ka_{k+1}+P_{k-1}$，$Q_{k+1}=Q_ka_{k+1}+Q_{k-1}$，$P_{k+1}Q_k-P_kQ_{k+1}=(-1)^k$，下面考虑$k+2$的情形：

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+1}}=\frac{P_k\left(a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+2}}\right)+P_{k-1}}{Q_k\left(a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+2}}\right)+Q_{k-1}}$$

$$=\frac{P_{k+1}a_{k+2}+P_k}{Q_{k+1}a_{k+2}+Q_k}$$

用反证法证明$(P_{k+1}a_{k+2}+P_k,\ Q_{k+1}a_{k+2}+Q_k)=1$。

若 $d=(P_{k+1}a_{k+2}+P_k, Q_{k+1}a_{k+2}+Q_k)>1$,

则 $d\mid[(P_{k+1}a_{k+2}+P_k)Q_{k+1}-(Q_{k+1}a_{k+2}+Q_k)P_{k+1}]$,

但上式右为$(-1)^{k+1}$,又 $d>1$,这不可能。从而

$$(P_{k+1}a_{k+2}+P_k,\ Q_{k+1}a_{k+2}+Q_k)=1$$

从而 $P_{k+2}=P_{k+1}a_{k+2}+P_k$,

$$Q_{k+2}=Q_{k+1}a_{k+2}+Q_k.$$

又 $P_{k+2}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_{k+2}$

$$=P_{k+1}a_{k+2}Q_{k+1}+P_kQ_{k+1}-P_{k+1}a_{k+2}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_k$$

$$=P_kQ_{k+1}-P_{k+1}Q_k=(-1)^{k+1}$$

由上面的结论，我们自然还可有：

(4) $\dfrac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}-\dfrac{P_k}{Q_k}=\dfrac{(-1)^k}{Q_kQ_{k+1}}$.

(5) $P_{k+2}Q_{-2}-P_{k-2}Q_{k+2}$

$$=(-1)^{k-1}(a_{k+2}a_{k+1}a_k+a_{k+2}+a_k).$$

由前面连分数性质（1）、（2）知

式左$=P_{k+2}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k+2}$

$$=(P_{k+1}a_{k+2}+P_k)Q_{k-2}-P_{k-2}(a_{k+1}Q_{k+1}+Q_k)=a_{k+2}P_{k+1}Q_{k-2}+P_kQ_{k-2}-a_{k+2}P_{k-2}Q_{k+1}-P_{k-2}Q_k$$

$$=a_{k+2}(P_{k+1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k+1})$$

$$
\begin{aligned}
&+ (P_kQ_{k-2} - P_{k-2}Q_{k+1}) \\
= & a_{k+2}[(a_{k+1}P_k + P_{k-1})Q_{k-2} \\
&- P_{k-2}(a_{k+1}Q_k + Q_{k-1})] \\
&+ [(a_kP_{k-1} + P_{k-2})Q_{k-2} - P_{k-2}(a_kQ_{k-1} \\
&+ Q_{k-2})] = a_{k+2}[a_{k+1}(P_kQ_{k-2} - P_{k-2}Q_k) \\
&+ (P_{k-1}Q_{k-2} - P_{k-2}Q_{k-1})] \\
&+ [a_k(P_{k-1}Q_{k-2} - P_{k-2}Q_{k-1})] \\
= & a_{k+2}a_{k+1}[(a_kP_{k-1} + P_{k-2})Q_{k-2} - P_{k-2} \\
&(a_kQ_{k-1} + Q_{k-2}] + (-1)^{k-1}a_{k+2} \\
&+ (-1)^{k-1}a_k = (-1)^{k-1}a_{k+2}a_{k+1}a_k \\
&+ (-1)^{k-1}a_{k+2} + (-1)^{k-1}a_k \\
= & (-1)^{k-1}(a_{k+2}a_{k+1}a_k + a_{k+2} + a_k)
\end{aligned}
$$

下面我们将证明，连分数的渐近分数将收敛到该连分数值。

（6）$\left\{\frac{P_n}{Q_n}\right\}$收敛（即当$n\to\infty$时有极限）。

考虑$\left\{\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}\right\}$和$\left\{\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}\right\}$，由上面性质（4）

有：

$$
\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} + \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}
$$

$$
= \frac{-1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}} + \frac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n}} > 0
$$

则 $\left\{\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}\right\}$是递增序列。

同理可证 $\dfrac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}}-\dfrac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$

$$=\frac{1}{Q_{2n+3}Q_{2n+2}}-\frac{1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}}<0。$$

则 $\left\{\dfrac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}\right\}$是递减序列。

应该指出，这里我们引用了结论：

$P_0<P_1<P_2<\cdots$

$Q_0<Q_1<Q_2<\cdots$

下面考虑 $\dfrac{P_{2n}}{Q_{2n}}$与$\dfrac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$的大小。当取奇数 $k>\max\{2n,\ 2m+1\}$时，则

$$\frac{P_k}{Q_k}>\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$$

又 $\left\{\dfrac{P_{2n}}{Q_{2n}}\right\}$递增，有$\dfrac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}>\dfrac{P_{2n}}{Q_{2n}}$，

及 $\left\{\dfrac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}\right\}$递减，有$\dfrac{P_k}{Q_k}<\dfrac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$.

综上，我们有$\dfrac{P_{2n}}{Q_{2n}}<\dfrac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$.

再由性质（4）及 $P_i<P_{i+1}$，$Q_i<Q_{i+1}$($i=0$，$1,2$，$\cdots$)，

有 $\left|\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\dfrac{P_n}{Q_n}\right|=\dfrac{1}{Q_{n+1}Q_n}<\dfrac{1}{n^2}$.

由哥西准则知$\left\{\dfrac{P_n}{Q_n}\right\}$有极限。

（7）若 $Q_n=P_{n-1}$，$n=2k$，则 $P_n=P_k^2+P_{k-1}^2$，$Q_n=P_kQ_k+P_{k-1}Q_{k-1}$。

由设 $Q_n=P_{n-1}$，$n=2k$，故

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_n}{P_{n-1}}=a_0+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_k}$$

$$+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k-1}}+\cdots+\frac{1}{a_0}$$

令 $$y=a_k+\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_{k-2}}+\cdots+\frac{1}{a_0},$$

则 $$\frac{P_n}{Q_n}=a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\frac{1}{y},$$

故 $$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{y\ P_k+P_{k-1}}{y\ Q_k+Q_{k-1}}.$$

又 $$\frac{P_k}{Q_k}=a_0+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_k},$$

所以 $$\frac{P_k}{P_{k-1}}=a_k+\frac{1}{a_{k-1}}+\cdots+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_0}=y$$

将其代入上式可有

$$\frac{P_n}{Q_n}=\left(\frac{P_k}{P_{k-1}}P_k+P_{k-1}\right)\Big/\left(\frac{P_k}{P_{k-1}}Q_k+Q_{k-1}\right)$$

$$=\frac{P_k^2+P_{k-1}^2}{P_kQ_k+P_{k-1}\ Q_{k-1}}$$

又 $(P^2_k+P^2_{k-1})(Q^2_k+Q^2_{k-1})$

$$=P^2_kQ^2_k+P^2_{k-1}Q^2_{k-1}+P^2_kQ^2_{k-1}+P^2_{k-1}Q^2_k$$

$$=(P^2_kQ^2_k+2P_kQ_kP_{k-1}Q_{k-1}+P^2_{k-1}Q^2_{k-1})$$

$$+(P^2_kQ^2_{k-1}-2P_kQ_kP_{k-1}Q_{k-1}+P^2_{k-1}Q^2_k)$$

$$=(P_kQ_k+P_{k-1}Q_{k-1})^2+(P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k)^2$$

$$=(P_kQ_k+P_{k-1}Q_{k-1})^2+1$$

即 $P^2_k+P^2_{k-1}$ 与 $P_kQ_k+P_{k-1}Q_{k-1}$ 互质。

从而 $P_n=P^2_k+P^2_{k-1}, Q_n=P_kQ_k+P_{k-1}Q_{k-1}$.

下面我们利用上述内容再来证明斐氏数列的一些性质。

1. 连分数$1+\overbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}}^{n个}$的值等于$\frac{u_{n+1}}{u_n}$。

令$a_k=\frac{P_k}{Q_k}$，因 $a_1=1=\frac{1}{1}$，$a_2=1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}$

故 $P_1=1$，$P_2=2$。

又 $P_{n+1}=P_na_{n+1}+P_{n-1}=P_n+P_{n-1}$，

有 $P_n=u_{n+1}$。

同理 $Q_1=1$，$Q_2=1$，又 $Q_{n+1}=Q_n\ a_{n+1}+Q_{n-1}=Q_n+Q_{n-1}$，故 $Q_n=u_n$，从而 $a_n=\frac{u_{n+1}}{u_1}$。

显然我们若求得

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}$$

的值，即可求得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 来。

设 $x=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots$，则

$$x-1=\frac{1}{1+(x-1)}，\text{即 } x^2-x-1=0。$$

解得 $x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$，因连分数是正值，故 $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$。

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$。

现在我们直接来利用比内公式求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$，这也即求出了连分数的值。

为此我们先来证明：与首项为 $a/\sqrt{5}$，公比为 $(\sqrt{5}+1)/2$ 的几何级数的第 n 项 a_n 最接近的整数是 u_n。

注意到 $|u_n-a_n|=\left|\frac{\tau_1{}^n-\tau_2{}^n}{\sqrt{5}}-\frac{\tau_1{}^n}{\sqrt{5}}\right|=\frac{|\tau_2|^n}{\sqrt{5}}$

又 $|\tau_2|<1$，故 $|\tau_n|^n<1$，再 $\sqrt{5}>2$，

故 $|u_n-a_n|=\frac{|\tau_2|^n}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2}$。

如是可设 $u_n=\frac{\tau_1^n}{\sqrt{5}}+Q_n$，这里 $|Q_n|<\frac{1}{2}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\tau_1^{n+1}}{\sqrt{5}}+Q_{n+1}\right)\Big/$

$$\left(\frac{\tau_1^n}{\sqrt{5}}+Q_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\tau_1+\frac{Q_{n+1}\sqrt{5}}{\tau_1^n}\right)\right.$$

$$\left.\Big/\left(1+\frac{Q_n\sqrt{5}}{\tau_1^n}\right)\right]=\tau_1$$

这里只须注意到 $\tau_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$ 即可.

我们想强调一点：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=1/\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{\tau_1}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

它恰为黄金比值（或黄金数）0.618…

我们回过头来利用连分数的性质，接着推证斐氏数列的一些性质.

2．我们由 $P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^k$ 及 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 的连分数式中 $P_n=Q_{n+1}$，可推得

$$u_{k+1}u_{k-1}-u_k^2=(-1)^k$$

3．由连分数的各渐近分数 $\frac{P_0}{Q_0}$、$\frac{P_1}{Q_1}$、…、

$\frac{P_n}{Q_n}$、…是既约分数，故有斐氏数列中相邻两项互质。

4. 由连分数性质（5）$P_{k+2}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k+2}$ $=(-1)^{k-1}(a_{k+2}\ a_{k+1}a_k+a_{k+2}+a_k)$可有

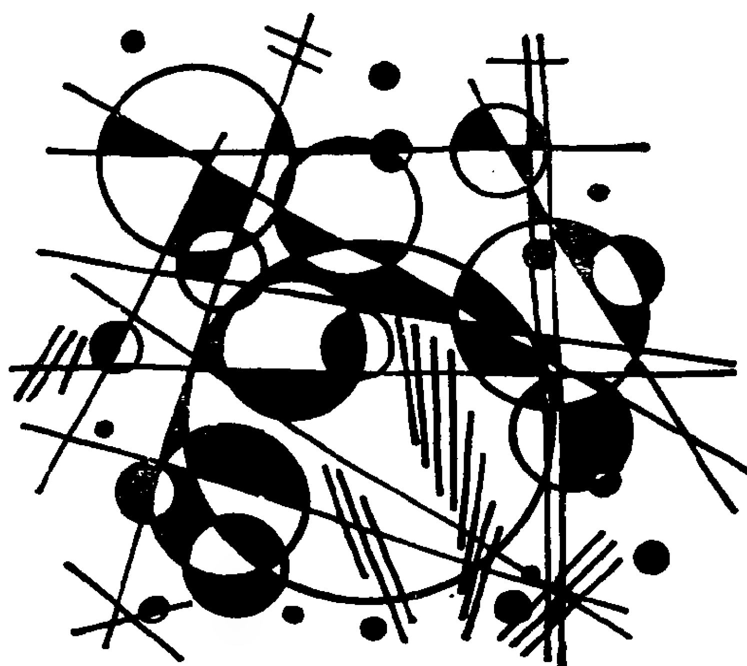
$$u_{k+3}u_{k-2}-u_{k-1}u_{k+2}=(-1)^{k-1}\cdot 3$$

5. 由连分数性质（7）我们可有：

$$u_{2k+1}=u^2{}_{k+1}+u^2{}_k;$$

$$u_{2k}=u_ku_{k+1}+u_{k-1}u_k.$$

九 斐氏数列的某些推广形式



前面我们已经提到过，借助斐氏数列"递归"的思想，可将斐氏数列加以推广，这个工作最早始于鲁卡斯，故通常推广的斐氏数列又称为鲁卡斯数列（或鲁卡斯—拉赫曼数列）．

下面我们将斐波那契数列稍加改造，以推广其形式，比如：

（1） $a_1=a$， $a_2=b, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\geqslant 1)$，这里 a、b 是常数；

（2） $a_1=a$，$a_2=b$， $a_{n+2}=\alpha a_{n+1}+\beta a_n(n\geqslant 1)$，这里 a、b；α、β 均为常数；

（3） $a_1=a$， $a_2=b$， $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n+f(n)$ 这里 a、b 是常数， $f(n)$是 n的函数；

……

利用循环(递归)级数通项的求法，我们不难求得它们的通项，下面我们来看一些例子：

1．$a_0=r$， $a_1=s$， $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ （$n\geqslant 0$），这里 r、s 为常数。

其通项为：$a_n=ru_{n-1}+su_n$。

2．$a_0=0$， $a_1=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n+c(n\geqslant 0)$，

这里 c 为常数。

由设 $(a_{n+2}+c)=(a_{n+1}+c)+(a_n+c)$，只须考虑新数列 $\tilde{a}_n=a_n+c$，由上面的结论 1 可有：

$$a_n=cu_{n-1}+(c+1)u_n-c$$

3．$a_0=1$，$a_1=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n+C_n^m$，$m$ 是一个给定的正整数。

其通项：$a_n=u_{m+1}u_{n+1}+(u_{m+2}+1)u_n-\sum_{k=0}^{m}C_{n+k}^{m-k}$。

4．若 $f(n)$、$g(n)$是任意函数，又

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n+f(n),$$

$$b_0=0,\ b_1=1,\ b_{n+2}=b_{n+1}+b_n+g(n),$$

$$c_0=0, c_1=1, c_{n+2}=c_{n+1}+c_n+xf(n)+yg(n).$$

我们可以用 a_n、b_n、x、y 和 u_n 来表示出 c_n。

$$c_n=xa_n+yb_n+(1-x-y)u_n$$

5．$a_0=0$，$a_1=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$。

其通项：$a_n=\frac{1}{5}[3^n-(-2)^n]$。

6．若通过 $e_0=0, e_1=1, e_{n+2}=e_{n+1}+e_n+u_n$ $(n\geqslant1)$来定义二阶斐波那契数列，则

$$e_n=\frac{3n+3}{5}u_n-\frac{n}{5}u_{n+1}$$

这可考虑 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e_nz^n$，注意到

$$(1-z-z^2)F(z)=z+u_0z^2+u_1z^3+\cdots$$
$$=z+z^2G(z)\qquad(*)$$

其中 $G(z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_kz^k$，这样可有：

$$F(z)=G(z)+z[G(z)]^2$$

又 $$G(z)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\tau_1z}-\frac{1}{1-\tau_2z}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(1+\tau_1z+\tau_1^2z^2+\cdots-1-\tau_2z-\tau_2^2z^2-\cdots)$$

$$[G(z)]^2=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{(1-\tau_1z)^2}+\frac{1}{(1-\tau_2z)^2}-\frac{2}{1-z-z^2}\right]$$

而 $[G(z)]^2$ 中 z^n 的系数是：

$$\sum_{0\leq k\leq n}u_ku_{n-k}=\frac{1}{5}[(n+1)(\tau_1^n+\tau_2^n)-2u_{n+1}]$$
$$=\frac{1}{5}[(n+1)(u_n+2u_{n-1})-2u_{n+1}]$$
$$=\frac{n-1}{5}u_n+\frac{2n}{5}u_{n-1}$$

注意到(*)式便可有：

$$e_n=\frac{3n+3}{5}u_n-\frac{n}{5}u_{n+1}$$

下面我们想用一个较为初等的办法先求出斐氏数列的通项，进而借用此办法来求推广的斐氏

数列的通项。

由 $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}(n\geqslant 1)$，两边同加上$\lambda u_n$，则有

$$u_{n+1}+\lambda u_n=(1+\lambda)\left(u_n+\frac{1}{1+\lambda}u_{n-1}\right)$$

于是问题就转化为确定参数 λ，使数列 $\{u_{n+1}+\lambda u_n\}$为等比数列，显然 λ 须满足：

$$\lambda=\frac{1}{1+\lambda}, \text{ 即 } \lambda=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$$

如是，数列$\{u_{n+1}+\lambda u_n\}$ 即为一个首项是 $u_1+\lambda u_0$，公比为 $q=1+\lambda$ 的等比数列，且

$$u_{n+1}+\lambda u_n=(u_1+\lambda u_0)(1+\lambda)^n$$

将 $\lambda=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$代入上式得 u_{n+1}，u_n 的线方程组：

$$\begin{cases} u_{n+1}+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}u_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ u_{n+1}+\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}u_n=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{cases}$$

消去 u_{n+1} 可解得：

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

我们又一次得到了比内公式。

下面我们利用上述方法来求一些推广的斐波那契数列（当然它也是递归数列）的通项公式。

7．$a_0=1, a_1=2$，且$a_{n+1}=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 1)$。

将递推关系改写为：

$$a_{n+1}-\lambda a_n=(1-\lambda)\left(a_n-\frac{1}{1-\lambda}a_{n-1}\right)$$

令 $-\lambda=-\dfrac{1}{1-\lambda}$，得 $\lambda_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$。

仿上可有：$a_{n+1}-\lambda a_n=(a_1-\lambda a_0)(1-\lambda)^n$。

将 $\lambda_{1,2}$ 代入上方程可得：

$$\begin{cases}a_{n+1}-\lambda_1 a_n=(2-\lambda_1)(1-\lambda_1)^n\\ a_{n+1}-\lambda_2 a_n=(2-\lambda_2)(1-\lambda_2)^n\end{cases}$$

解得 $a_n=2\cos\left(\dfrac{n-1}{3}\right)\pi$。

一般地，我们可给出下面广义斐波那契数列的通项：

8．a_0、a_1 给定 $a_{n+1}=b_1a_n+b_2a_{n-1}$，这里 b_1、b_2 给定的非零常数。

引入 λ 将上递归关系式改写为

$$a_{n+1}+\lambda a_n=(b_1+\lambda)\left(a_n+\frac{b_2}{b_1+\lambda}a_{n-1}\right)$$

若其为等比数列，则 $\lambda=\dfrac{b_2}{b_1+\lambda}$，即

$$\lambda^2+b_1\lambda-b_2=0 \qquad (**)$$

若其两根为 λ_1，λ_2，则当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，

$a_n[(a_1+\lambda_1a_1)(b_1+\lambda_1)^n-(a_1+\lambda_2a_0)(b_1$

$+\lambda_2)^n]/(\lambda_1-\lambda_2)$ $(n\geqslant 0)$

而 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，则有

$$a_{n+1}=b_1a_n-\frac{b_1^2}{4}a_{n-1}\quad(n\geqslant 2)$$

对于后面的情形，这只须注意到，若引进函数

$$f(\lambda)=(a_1+\lambda a_0)(b_1+\lambda)^n$$

则 $a_n=\dfrac{f(\lambda_1)-f(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}$

注意到 $\lambda_1+\lambda_2=-b_1$，故当λ_1、$\lambda_2\longrightarrow-\dfrac{b_1}{2}$时即为 $f(\lambda)$ 在$-\dfrac{b_1}{2}$处的导数值：

$$f'(\lambda)\Big|_{\lambda=-\frac{b_1}{2}}=n\left(\frac{b_1}{2}\right)^{n-1}a_1-(n-1)\left(\frac{b_1}{2}\right)^na_0$$

$(n\geqslant 0)$

注意到 $\lambda_1=\lambda_2=-\dfrac{b_1}{2}$，$b_1^2+4b_2^2=0$，则有

$$a_{n+1}=b_1a_n-\frac{b_1^2}{4}a_{n-1}(n\geqslant 1)$$

我们可用数学归纳法证明它。

1) $n=0$，1 时显然。

2) 设 $n=k$，$k+1$时结论真，今考虑 $n=k+2$的情形。

即由

$$a_k=k\left(\frac{b_1}{2}\right)^{k-1}a_1-(k-1)\left(\frac{b_1}{2}\right)^ka_0$$

$$a_{k+1}=(k+1)\left(\frac{b_1}{2}\right)^k a_1-k\left(\frac{b_1}{2}\right)^{k+1}a_0$$

及递推关系式可有：

$$\begin{aligned}a_{k+2}&=b_1a_{k+1}-\frac{b_1^2}{4}a_k\\&=b_1\left[(k+1)\left(\frac{b_1}{2}\right)^k a_1-k\left(\frac{b_1}{2}\right)^{k+1}a_0\right]\\&\quad-\frac{b_1^2}{4}\left[k\left(\frac{b_1}{2}\right)^{k-1}a_1-(k-1)\left(\frac{b_1}{2}\right)^k a_0\right]\\&=(k+2)\left(\frac{b_1}{2}\right)^{k+1}a_1-(k+1)\left(\frac{b_1}{2}\right)^{k+2}a_0\end{aligned}$$

即　$n=k+2$ 时命题亦正确。

注　这个方法可以推广到三阶循环（递归）数列的情形，比如求：$a_0=1$，$a_1=2$，$a_2=3$，且 $a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n+a_{n-1}-4$（$n\geqslant1$）的通项。

先令 $a_n=b_n+\delta$，代入递归关系式有：

$b_{n+2}+\delta=(b_{n+1}+\delta)+3(b_n+\delta)+(b_{n-1}+\delta)$

即　$b_{n+2}=b_{n+1}+3b_n+b_{n-1}+4\delta-4$。

取 $\delta=1$，这时问题化为：$b_0=0$，$b_1=1$，$b_2=2$，$b_{n+2}=b_{n+1}+b_n+b_{n-1}$（$n\geqslant1$）。

再引入参数 λ、ξ 使

$$b_{n+2}+\lambda b_{n+1}+\xi b_n=(1+\lambda)\left(b_{n+1}+\frac{3+\xi}{1+\lambda}b_n+\frac{1}{1+\lambda}b_{n-1}\right)$$

则参数 λ、ξ 应满足方程组

$$\begin{cases}\lambda=(3+\xi)/(1+\lambda)\\\xi=1/(1+\lambda)\end{cases}$$

方可使 $\{b_{n+2}+\lambda b_{n+1}+\xi b_n\}$ 为等比数列。

消去 λ 得 $\xi^3+3\xi^2+\xi-1=0$，即 $(\xi+1)((\xi^2+2\xi-1)=0$。

解之代入原方程组后可有

$$\begin{cases}\xi_1=-1\\ \lambda_1=-2\end{cases}\quad \begin{cases}\xi_2=-1+\sqrt{2}\\ \lambda_2=\sqrt{2}\end{cases}\quad \begin{cases}\xi_3=-1-\sqrt{2}\\ \lambda_3=-\sqrt{2}\end{cases}$$

这时我们可有

$$b_{n+1}+\lambda_i b_n+\xi_i b_{n-1}=(b_2+\lambda_i b_1+\xi_i b_0)(1+\lambda_i)^{n-1}$$
$$=(2+\lambda_i)(1+\lambda_i)^{n-1}\qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

将 λ_i，ξ_i $(i=1,\ 2,\ 3)$代入上式，可得 b_{n+1}，b_n，b_{n-1} 的线性方程组：

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2}-1\\ 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{n+1}\\ b_n\\ b_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ (2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{n-1}\\ (2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{n-1}\end{pmatrix}$$

解得 $b_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n]$

$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$。

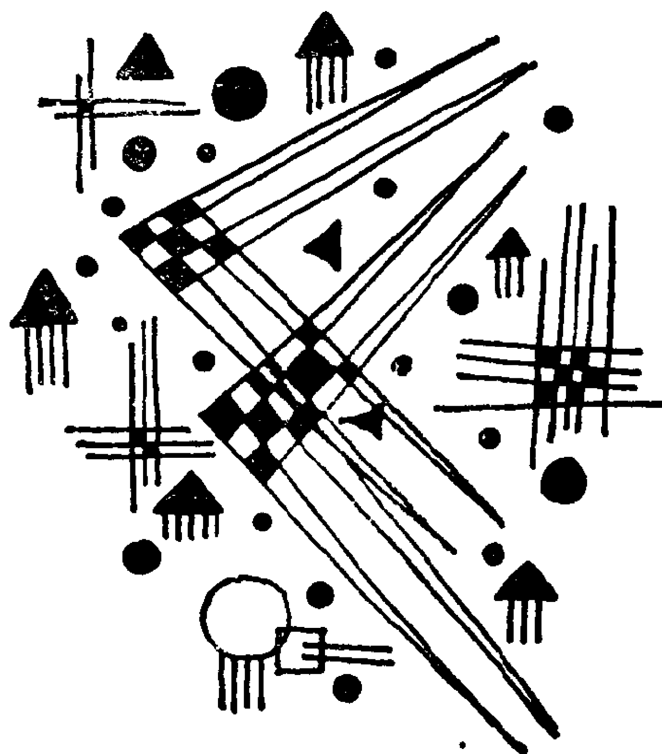
又 $a_n=b_n+1$，则可有：

$$a_n=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n]$$

$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

当然它也可按照前面章节介绍的求 k 阶循环级数通项的方法直接去求。

十 斐氏数列的应用



下面我们来谈谈斐氏数列的某些重要应用。

1. 拉姆定理的证明

前面我们提到过：1884年拉姆利用斐氏数列证明：应用辗转相除法的步数（即辗转相除的次数）不大于较小数的位数的五倍。这是斐氏数列的最早应用。下面我们来叙述这个证明。

假设(a_{n+1}, a_n)是一对整数，且$a_n = \min\{a_{n+1}, a_n\}$，又它们的辗转相除中含有 n步（$n>1$）。

下面我们来讨论：当 n固定时，a_n的最小值是什么？今设辗转相除过程的n 个步骤表为：

$$a_{n+1} = m_n a_n + a_{n-1} \quad (0<a_{n-1}<a_n)$$

$$a_n = m_{n-1} a_{n-1} + a_{n-2} \quad (0<a_{n-2}<a_{n-1})$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_4 = m_2 a_3 + a_2 \qquad (0<a_2<a_3)$$

$$a_3 = m_2 a_2 + a_1 \qquad (0<a_1<a_2)$$

$$a_2 = m_1 a_1$$

其中 a_i, m_i均为自然数$(i = 1, 2, \cdots, n)$，故它

们都不小于1．特别地应该指出：$m_1 \neq 1$，否则由$a_2 = m_1 a_1$有 $a_2 = a_1$，这与前式中 $0 < a_1 < a_2$ 的假设相抵，故$m_1 \geqslant 2$。

这样，我们按照上述诸表达式相继推去有：

$a_1 \geqslant 1$

$a_2 \geqslant 2 \cdot 1 = 2$

$a_3 \geqslant 1 \cdot 2 + 1 = 3$

$a_4 \geqslant 1 \cdot 3 + 2 = 5$

$a_5 \geqslant 1 \cdot 5 + 3 = 8$

……

当$i > 1$时，这里均是以最小的$m_i = 1$来计算的，容易看出：

$a_n \geqslant u_{n+1}$，这里u_i 为斐氏数列的第 i项，由斐氏数列的性质：$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n > 2)$，我们不难证明：

$u_{n+5} > 10u_n$

事实上，$n = 1, 2, 3, 4$ 时，结论显然直接计算可得），当$n > 4$时，我们有

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} = 2u_{n-2} + u_{n-3}$$

又
$$\begin{aligned} u_{n+5} &= u_{n+4} + u_{n+3} = 2u_{n+3} + u_{n+2} \\ &= 3u_{n+2} + 2u_{n+1} = 5u_{n+1} + 3u_n \\ &= 8u_n + 5u_{n-1} = 13u_{n-1} + 8u_{n-2} \\ &= 21u_{n-2} + 13u_{n-3} > 20u_{n-2} + 10u_{n-3} \\ &= 10u_n \end{aligned}$$

此即说：u_{n+5}至少比u_n多一位数。

我们知道：当$0<n\leqslant 6$时，u_n是一位数，由上结论：

当$6<n<2\cdot 5+1$时，u_n至少是两位数，

当$2\cdot 5+1<n\leqslant 3\cdot 5+1$时，$u_n$至少是五位数，

当$3\cdot 5+1<n\leqslant 4\cdot 5+1$时，$u_n$至少是4位数，

……

当$k\cdot 5+1<n\leqslant(k+1)\cdot 5+1$时，$u_n$至少是$k+1$位数。

对任何自然数n，必有整数k使$k\cdot 5<n\leqslant(k+1)\cdot 5$或$k\cdot 5+1<n+1\leqslant(k+1)\cdot 5+1$，这样$u_{n+1}$至少是$k+1$位数，于是$a_n$的位数的五倍至少是$5(k+1)$，从而

$n\leqslant(k+1)\cdot 5\leqslant$（$a_n$的位数的5倍）。

2. 单位分数问题

分子是1的分数称为单位分数。因为大约两千年以前古埃及人已开始研究这种分数，故它又称为埃及分数。

数论中有把真分数表为单位分数（或埃及分数）和的问题，下面的结论将是重要的：

任何一个真分数总可以表示成不同的单位分数之和。

它的证明便是用与前一命题证明类似的方法——斐波那契演段进行的。

设$\frac{m}{n}$是一个真分数，即 $m<n$。若$\frac{1}{x_1}$是不超过$\frac{m}{n}$的最大单位分数，如果$\frac{1}{x_1}=\frac{m}{n}$，则命题已证得；否则有$\frac{1}{x_1}<\frac{m}{n}$。于是有

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{x_1}=\frac{mx_1-n}{nx_1}=\frac{m_1}{nx_1}$$

其中$x_1>0, m_1>0$。

由于$\frac{1}{x_1-1}>\frac{m}{n}$，故 $m_1=mx_1-n<m$。

设$\frac{1}{x_2}$是不超过$\frac{m_1}{nx_1}$的最大单位分数，如果$\frac{1}{x_2}=\frac{m_1}{nx_1}$，则命题已证得，否则有$\frac{1}{x_2}<\frac{m_1}{nx_1}$，于是有：

$$\frac{m_1}{nx_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{m_1x_2-nx_1}{nx_1x_2}=\frac{m_2}{nx_1x_2}$$

其中$x_2>1, x_1<x_2, m_2>0$。

由于$\frac{1}{x_2-1}>\frac{m_1}{nx_1}$，故$m_2<m_1<m$.

如此下去，可得$m>m_1>m_2>\cdots>m_k=0$，而且

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}$$

因为每进行一步上列演段，分子至少减少1，故$1\leqslant k\leqslant m$。

这就是说：任何一个真分数$\frac{m}{n}$ $(0<m<n)$总可以表示成不超过m个不同的单位分数（埃及分数）之和的形式。

注 这种问题与某些不定方程求解有关。

3. 在优选法中的应用

斐氏数列的重要应用，还要算它在本世纪五十年代出现的“优选法”中的应用。

“优选法”是近年出现的“最优化方法”的一个分支，它是用计算方法去求函数的极值问题。这个问题其实是一个古老的问题，早在牛顿发明微积分的年代，人们已经知道通过导数去求函数的极值点。1847年，哥西还提出了最速下降法.当函数的变元或次数的增加时，求解上述极值问题变得较为困难。近几十年来，由于电子计算机的应用和实际需要的增长，又使得这门古老的

课题获得新生，一门新的学科分支——最优化方法应运而生了。

在这些算法中，斐波那契数列曾作为一种算法而呈现它在计算过程中的最优性，我们先来看看算法。

假定$f(x)$在区间〔a,b〕上是单峰函数，即$f(x)$在〔a,b〕上只有一个极值点x^*，若它是极小点，则$f(x)$在x^*的左边严格单减，而$f(x)$在x^*的右边严格单增。如果我们打算通过某种取点方式只计算n次函数值，就将$f(x)$在〔a,b〕上的近似极小点求出来（严格地讲是把极小点存在的区间长度缩到最小），那么我们可以按照下面的办法即斐波那契（数列）法：

取$x_1=\frac{u_{n-2}}{u_n}(b-a)+a$，$\tilde{x}_1=\frac{u_{n-1}}{u_n}(b-a)+a$；计算 $f(x_1)=f_1$，$f(\tilde{x}_1)=\tilde{f}_1$；

若$f_1<\tilde{f}_1$，则置 $a_1=a,b_1=\tilde{x}_1$；若$f_1>\tilde{f}_1$，则置$a_1=x_1,b_1=b$（我们把$f_1=\tilde{f}_1$并入$f_1<\tilde{f}_1$的情形）；

我们在新区间〔a_1,b_1〕上仿上面办法插入点：

$x_2=\frac{u_{n-3}}{u_{n-1}}(b_1-a_1)+a_1$，$\tilde{x}_2=\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}(b_1-a_1)+a_1$重复上面的做法可得〔$a_2,b_2$〕，如此做下去。

我们想指出两点：

（1）每计算一步（又称迭代一次）新区间的长度为原来区间长的$\frac{u_{k-1}}{u_k}$。

比如第一次迭代，注意到：

$$\tilde{x}_1 - a = \frac{u_{n-1}}{u_n}(b-a)$$

$$b - x_1 = b - \left[\frac{u_{n-2}}{u_n}(b-a) + a\right]$$

$$= \frac{u_n - u_{n-2}}{u_n}(b-a) = \frac{u_{n-1}}{u_n}(b-a)$$

结论便是显然的了，对于后面的计算，道理同上。

（2）每迭代一步，区间缩小后保留的点，在下步迭代中还可使用。

在第二步迭代中，必有下面四种情况之一发生：

$x_1 = x_2, \tilde{x}_1 = x_2, x_1 = \tilde{x}_2, \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$

容易验证：当$f_1 \leqslant \tilde{f}_1$时，$\tilde{x}_2 = x_1$；当$f_1 > \tilde{f}_1$时；$x_2 = \tilde{x}_1$。

这说明保留的点与新插入的一点之一重合，即在第二步迭代中只须计算3个点的值。

类似地，第$n-1$步迭代只须计算 n个点的函数值。而且容易算出，这时区间$[a_{n-2}, b_{n-1}]$的长

$$b_{n-2} - a_{n-2} = \frac{u_2}{u_n}(b-a) = \frac{1}{u_n}(b-a)$$

对于单峰函数来讲，它是最优的。下面来证明这一点。

设L_n为某区间的长度：它使按某种取点方式求n次函数值后，在可能遇到的各种情况下，总能把新区间（又称搜索区间）的长度缩为1，最优取点方式应保证使L_n最大。

设L_k的上确界为$U_k(k=1,2,\cdots,n)$。显然，U_k就是计算第k次函数值总能把搜索区间缩短到1的最大区间长度，由于要计算两次函数值后才能缩短区间，故$U_0=U_1=1$。

今估计对应于计算n次函数值的上界U_n。设最初的两个试探点为x_1、x_2($x_1<x_2$)，则余下来还可以计算$n-2$次函数值。

极小点可能位于区间$[a,x_1]$，也可能位于区间$[x_1,b]$。当极小点位于$[a,x_1]$时，我们必须借助于在其中计算$n-2$次函数值，把该区间缩短为1，故应有：

$$x_1-a\leqslant U_{n-2}$$

当极小点位于$[x_1,b]$上时，除了可再计算$n-2$次函数值外，还能利用其中已计算的一点x_2处的函数值，所以总共可以利用$(n-2)+1=n-1$个函数值，故应有：

$b-x_1 \leqslant U_{n-1}$

于是我们有 $L_n = b-a \leqslant U_{n-2}+U_{n-1}$，故

$U_n \leqslant U_{n-2}+U_{n-1}$

由斐氏数列取点法及上面的推算，知该算法经 n 次函数求值解保证把搜索区间缩为原来的 $1/u_n$，从而它是最优的。

注 下面给出斐波那契法的算法：

1．置初始区间左、右端点a, b；置精度ε（最终区间的最大允许长度）和能够分辨函数值的最小间隔δ。

2．求计算函数值的次数N，即求使得$u_n \geqslant (b-a)/\varepsilon$成立的最小整数。

3．置 $k=N$，且按下面算式计算区间$[a, b]$ 的两个内点：

$$x_l = a+\frac{u_{n-2}}{u_n}(b-a) \qquad (*)$$

$$x_r = a+\frac{u_{n-1}}{u_n}(b-a) \qquad (**)$$

4．置$k=k-1$。

5．若$f(x_l) \geqslant f(x_r)$，则转6；否则

(1) 置$b=x_r$, $x_r=x_l$。

(2) 根据k的大小，分别执行下列步骤：当$k<2$ 时，停止计算；当$k>2$时，按($*$)计算x_r；当$k=2$时，置 $x_l=x_r-\delta$。

(3) 转4。

6．置$a=x_l, x_l=x_r$。然后根据k的大小分别执行下

列步骤：当$k<2$时，停止计算；当$k>2$时，按（* *）计算 x_r；当$k=2$时，置$x_r=x_l+\delta$。

7．转4。

4．在集合论和数值积分上的应用

斐氏数列还有一些其他应用，这儿我们只能略举几例，借此去窥其一斑而已。

这是一个关于“集合论”方面的问题。

设$A_1,\cdots,A_n$ 是集E 的子集，证明E的所有可以通过对集 $A_1\setminus A_2, A_2\setminus A_3$，…，$A_{n-1}\setminus A_n$，$A_n\setminus A_1$作并、交和补（关于$E$的）的运算而得到的不同子集的最大可能的个数是 $2^{\varphi(n)}(n\geqslant 2)$，

这里$\varphi(n)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$。

证 对任意的$B\subseteq E$，记$B^1=B$，$B^0=E/B$，且设$C_i=A_i\setminus A_{i(\mathrm{mod}\,n)+1}$。我们研究集$D_\sigma=\bigcap\limits_{i=1}^{n}C_i^{\sigma i}$，这里$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 是由0和1组成的数组。当$\sigma_1\neq\sigma_2$时，$D_{\sigma 1}\cap D_{\sigma 2}=\phi$，并且容易看出，通过集的并、交和补的运算由集$C_i$得到的每个集可表示成若干个集 D_σ 的并的形式。故通过上述运算从C_i 获得的集M的个数等于 2^N，这里N是非空集D_σ的个数。

注意到当$\sigma_i=\sigma_{i(\bmod n)+1}=1$时，$D_\sigma=\phi$。

故 $N\leqslant\varphi(n)$，这里$\varphi(n)$是由0和1所组成的数组$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$的个数，且其对任何$i$也不满足$\sigma_i=\sigma_{i(\bmod n)+1}=1$；我们把这样的数组称为允许的。

若集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$适合$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i^{\sigma_i}\neq\phi$（对任何$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$），那么容易验证，对于允许的$\sigma$，有

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i^{\sigma_i}\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}C_i^{\sigma_i}$$

亦即$D_\sigma\neq\phi$，因为等式$N=\varphi(n)$是可能的。

若$(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$是允许的数组，那么数组$(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n,0)$也是允许的；

若$(\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_n)$是允许的数组，那么当$\sigma_n=1$时，数组$(1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n,0)$也是允许的；当$\sigma_n=0$时，数组$(0,\sigma_2,\cdots,\sigma_n,1)$也是允许的。

因为这样没有重复地列举了所有长为$n+1$的允许数组，故$\varphi(n+1)=\varphi(n)+\varphi(n-1)$。

又 $1\equiv0(\bmod 1)$，$\sigma_1=\sigma_{1(\bmod 1)+1}=1$，故$\sigma=(1)$是非允许的数组，从而$\varphi(1)=1$。再由$\varphi(2)=3$，则$\{\varphi(n)\}$构成广义斐波那契数列。

容易证明 $\varphi(n)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

华罗庚教授曾经指出，斐波那契数列与数值积分也有关系，他曾介绍了这个数列在丢番图逼近上的独特地位，进而联想到数值积分公式：

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy \sim \frac{1}{u_{n+1}}\sum_{t=1}^{u_{n+1}} f\left(\left\{\frac{t}{u_{n+1}}\right\},\left\{\frac{tu_n}{u_{n+1}}\right\}\right)$$

这是用单和来逼近重积分的公式，这里$\{x\}$表示x的分数部分。

如何将它推广到多维的情形呢？

注意到$\frac{u_n}{n_{n+1}}\to\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$n\to+\infty$时），而$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$是我们前面提到过而后面还要讲的黄金数，同时它还是五等分单位圆而产生的，即从

$x^5=1$

或由$x^4+x^3+x^2+x+1=0$

中令$y=x+\frac{1}{x}$，而得到$y^2+y-1=0$。

解之有　$y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，或$y=2\cos\frac{2\pi}{5}$。

这是分圆数。即然五等分圆数的$2\cos\frac{2\pi}{5}$有用处，那当p是奇质数，分圆为p等分的

$$2\cos\frac{2\pi l}{p},\ 1\leqslant l\leqslant \frac{p-1}{2}=s$$

是否可用来处理多维的数值积分？

闵可夫斯基早已证明有$x_1,x_2,\cdots,x_s$及y使

$$\left|2\cos\frac{2\pi l}{p}-\frac{x_l}{y}\right|\leqslant\frac{s-1}{sy^{s/s-1}}$$

但闵可夫斯基的证明是存在性的证明，对于分圆域

$$R\left(2\cos\frac{2\pi}{p}\right)$$

而言，因为有一个独立单位系的明确表达式，所以能够有效地找到 $x_1,x_2,\cdots,x_{s-1}$与y，故可用

$$\left(\left\{\frac{t}{y}\right\},\ \left\{\frac{tx_1}{y}\right\},\cdots,\ \left\{\frac{tx_{s-1}}{y}\right\}\right),t=1,2,$$

$\cdots,y$

来代替

$$\left(\left\{\frac{t}{u_{n+1}}\right\},\ \left\{\frac{tu_n}{u_{n+1}}\right\}\right),\ t=1,2,\cdots,u_{n+1}$$

这不仅可用于数值积分，也可用于凡有随机数的地方。

5. 正方形铺满平面问题与斐氏数列

我们再来看一个用正方形铺满平面的问题，

这些正方形的边长都是整数，且它们的规格（边长）都不相同。

当然，我们想顺便讲几句关于完美正方块的问题，所谓完美正方块是指这样的正方块：它可以用一些规格各不相同的（但边长都是整数）的小正方形盖满。

第一块完美正方块是1938年由美国一所大学的四位学者发现的，它由69个小正方形组成，故称它为69阶。

1940年，布鲁克等人利用完美矩形* 找到一个26阶的完美正方形。

1967年，威尔逊给出一个 25 阶完美正方块（见图10—2（1））。

1978年，荷兰斯切温特大学的一位教师狄金维蒂吉借助于电子计算机（使用了极为复杂的程序）给出了一个21阶的完美正方块（见图 10—2（2）），

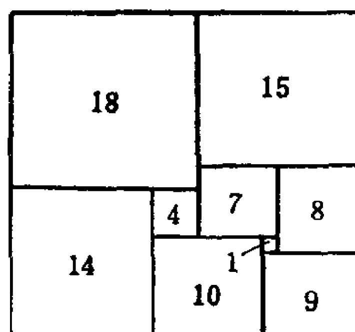


图10—1

---

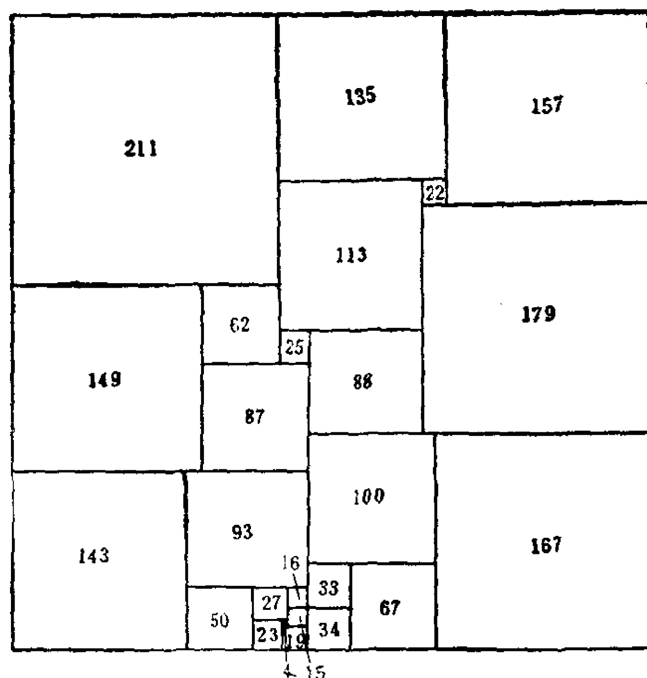
* 所谓完美矩形是指由大小不同的正方形所拼成的矩形．

布鲁克等人于1940年曾给出9～11阶完美矩形的明细表，并证明了完美矩形的最低阶数是 9（见图10—1）．

尔后，布卡姆等人在1960年又用电子计算机算出 9～15阶的全部完美矩形．

（2）），他还证明了这个阶数的完美正方块是唯一的。

苏联学者鲁金早在五十年代就证明了完美正方块的最低阶数是21（又一说这个结论尚未被人

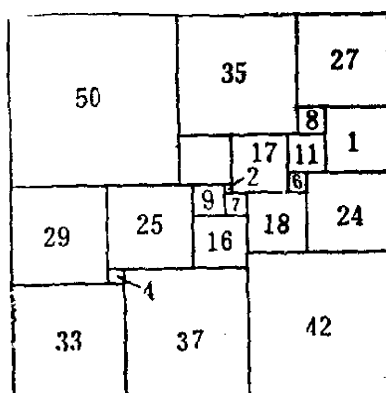


（1） 25阶完美正方块

们证实）.

我们或许会问：能否用边长分别为1、2、3、…的正方形去铺满整个平面？

这个问题至今未能获得解决，但是人



(2)21阶完美正方块

图 10—2

们借用斐波那契数列的性质证明：

用边长为1、2、3、…的(自然数边长的)正方形，至少可以铺满整个平面的四分之三。

从图10—3上我们可以看到，在图中虚线为坐标轴的平面的四个象限中：

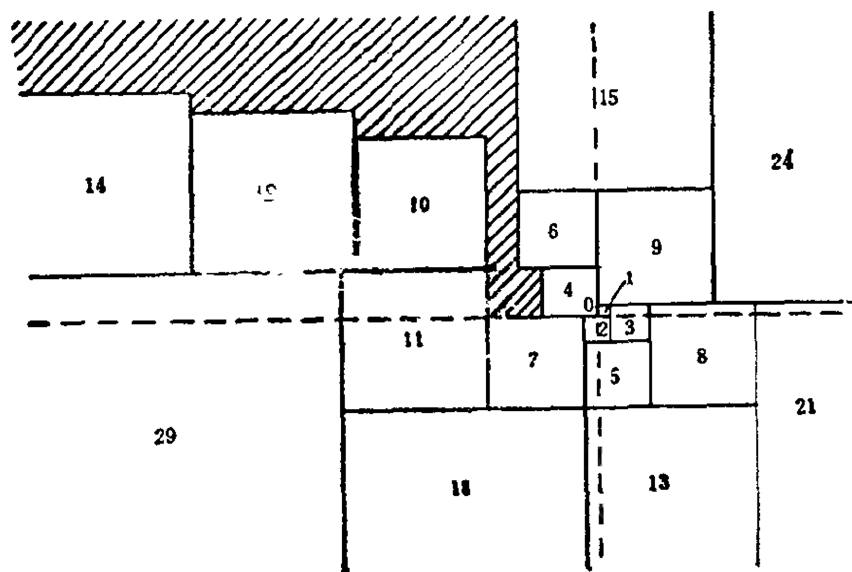


图 10—3

用斐波那契数列1，2，3，5，…为边长的正方形可以铺满坐标平面的第四象限；

用广义斐波那契数列（4），（6），9，15，24，…为边长的正方形可以铺满坐标平面的第一象限；

用广义斐波那契数列7,11,18,29，…为边长的正方形可以铺满坐标平面的第三象限；

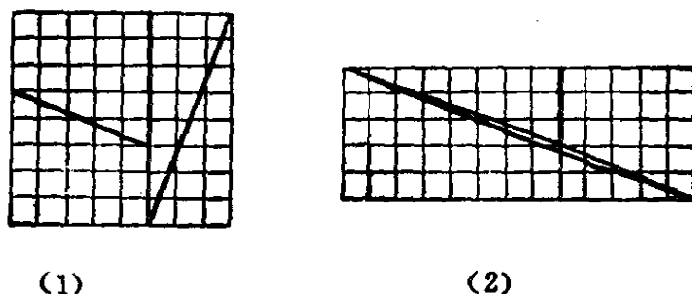
还有没在上述三个数列中出现中4、6、10、12、14、…等为边的正方形放在第二象限。

由图可以明显地看出：以1，2，3，…为边长的正方形至少可以铺满平面的四分之三。

斐波那契数列的性质，还常常被用在某些数学游戏上。下面的两则图形拼剪问题正是这样。

6．斐氏数列与数学游戏(拼图和火柴游戏)

把一个边长为8的正方形按图10—4（1）方式剪裁（沿图中粗线），然后拼成图10—4（2）的矩形，拼后你会发现：



（1）　　（2）

图　10—4

原来正方形面积为：$8^2=64$，

而矩形面积是$13\times5=65$，

这分明多出一个面积单位来，何故？这显然是一个悖论题。

当然你若真的动手去剪拼，你会发现其中的结症所在：图（2）的矩形中间是有缝的（有时或许会有重叠）。

注意到正方形和矩形边长数字3、5、8恰

好是斐氏数列中相邻的三项，由斐氏数列性质：

$$u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

你会恍然大悟的。

在上面的剪拼问题里，u_n^2 是正方形面积，$u_{n-1}u_{n+1}$是剪拼后的矩形面积。

顺便讲一句，若按照上面的办法把正方形剪拼成矩形（要求面积不变），应当如何剪裁？

如图10—5，我们可有：

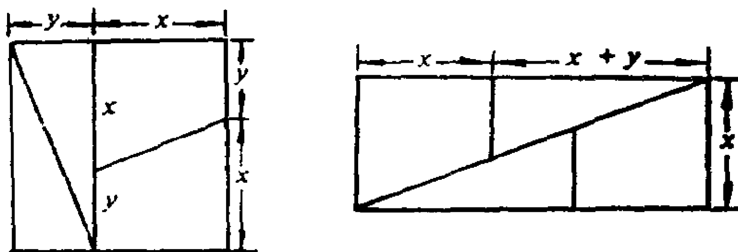


图 10—5

$$S_{正方形} = (x+y)^2$$

$$S_{矩形} = (2x+y)x$$

欲使 $S_{正方形} = S_{矩形}$，即$(x+y)^2-(2x+y)x=0$。亦即 $x^2-xy-y^2=0$。

两边同除以y^2，有$\left(\frac{x}{y}\right)^2-\left(\frac{x}{y}\right)-1=0$。解得

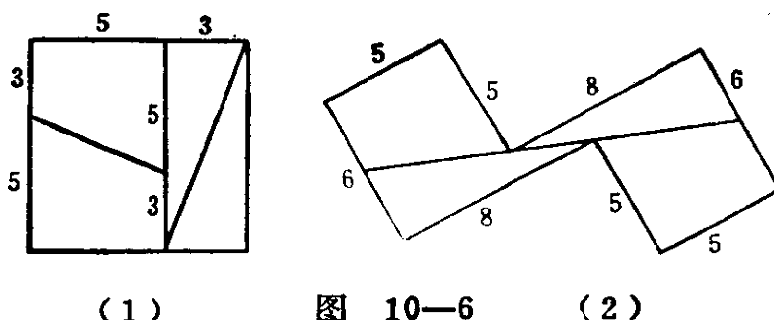
$$\frac{x}{y}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

它们恰为比内公式中两个数据，注意到：$\frac{x}{y}=$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$时即为黄金分割。

故能实现上述完全剪拼的充要条件是 $x:y=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 时。

我们再来看看另外一种拼剪，如图10—6：



（1）　　图　10—6　　（2）

你也会发现，图10—6（2）的面积：$2\times5\times6+(6-5)\times(8-5)=63$，比图10—6（1）正方形面积少了1。

真的动手剪拼你也会发现：图10—6（2）中有重叠的部分！

这里也是利用了斐氏数列的另外一个性质：

$$4u_{n-1}u_{n-2}+u_{n-2}u_{n-4}-u_n^2=(-1)^n$$

它的证明只须注意到 $u_k^2-u_{k-1}u_{k+1}=(-1)^k$，便有：

$$\begin{aligned}&4u_{n-1}u_{n-2}+u_{n-2}u_{n-4}\\&=4u_{n-1}u_{n-2}+u_{n-2}(2u_{n-2}-u_{n-1})\\&=u_{n-2}(4u_{n-1}+2u_{n-2}-u_{n-1})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= u_{n-2}(3u_{n-1} + 2u_{n-2}) \\
&= u_{n-2}(u_n + u_{n-2} + 2u_{n-1}) \\
&= u_n u_{n-2} + u^2_{n-2} + 2u_{n-1}u_{n-2} \\
&= u^2_{n-1} + (-1)^n + u^2_{n-2} + 2u_{n-1}u_{n-2} \\
&= (u_{n-1} + u_{n-2})^2 + (-1)^n \\
&= u_n^2 + (-1)^n
\end{aligned}
$$

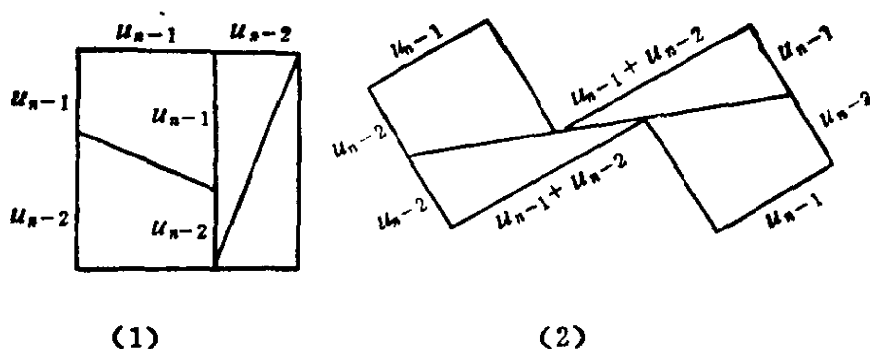


图 10—7

顺便指出：对于后面的剪拼问题，若要使剪拼后图形无缝或重叠的充要条件是$x:y=\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{5})$。

当然x、y亦满足：$x:(x+y)=y:x$。

最后我们讲一个火柴游戏问题。

火柴游戏，是我国流传很早的一种游戏，不过当时是用“筷子”来玩的，所以又叫“筷子游戏”。十九世纪曾传入欧洲，外国人称之为“尼姆”(Nim)详见文献〔27〕。

火柴游戏玩法很多，比如有两堆火柴（根数

一样），两人轮流在每堆中取若干根（但不能不取），规定取最后一根者为胜．用数学归纳法可以证明：后取者可操胜券。

如果火柴堆数不限，且每堆火柴数多少随意，玩法同上．试问如何可取胜？这就需要借助于“二进制”来帮忙了。

下面我们介绍一下“斐波那契尼姆”游戏。

有一堆火柴，两人轮流从中取．先取的一方可任意取，后取的一方所取火柴的根数不得超过对方刚才所取火柴数的二倍，规定取到最后一根者为胜。

如何可得到制胜的秘诀？可以证明：

若游戏开始时的火柴数恰为斐波那契数列中的某个数时，若后走者明白走法的“窍门”，则他必胜；若游戏开始时的火柴数不是斐波那契数列中的数时，则先走者可赢（若他也懂得走法的“窍门”）。

下面我们简要的证明一下它。

在证明之前，我们先来叙述如下一个命题：

引理 对于每一正整数 n，则它可唯一的表示为：

$$n=u_{k_1}+u_{k_2}+\cdots+u_{k_r}$$

其中$k_1\geqslant k_2+2\geqslant k_3+2\geqslant\cdots\geqslant k_r+2\geqslant 2$。

证 用数学归纳法（对 n归纳）。

1）$n=1$时，结论显然。

2）设$n<m$时，结论都真，今考虑$n=m$的情形。

取u_{k_1}为小于或等于m的斐氏数列中的最大者，则$m-u_{k_1}<m-1$，由归纳假设，$m-u_{k_1}$有唯一的斐波那契数系表示：

$u\tilde{k}_1+u\tilde{k}_2\cdots+u\tilde{k}_r$

且$u\tilde{k}_1<u_{k_1}$，从而m亦有唯一的斐波那契数系表示。

综上，对任何自然数n，命题均成立。

下面我们来证明前面的结论。

若 $n=u_{k_1}+u_{k_2}+\cdots+u_{k_r}$，则命：$n>0$时，$\mu(n)=u_{k_r}$；若$n=0$时，$\mu(n)=\infty$。这样：

（1）若$n>0$，则$\mu(n-\mu(n))>2\mu(n)$。

因为$\mu(n-\mu(n))=u_{k_r}-1\geqslant u_{k_r+2}>2u_{k_r}$，且$k_r\geqslant 2$。

（2）若$0<m<u_k$，则 $\mu(m)\leqslant 2(u_k-m)$。

实因，若令$\mu(m)=u_j$，$m\leqslant u_{k-1}+u_{k-3}+\cdots+u_{j+(k-1-j)(\bmod 2)}=-u_{j-1+(k-1-j)(\bmod 2)}+u_k\leqslant -\frac{1}{2}u_j+u_k$。

（3）若$0<m<\mu(n)$，则$\mu(n-\mu(n)+m)\leqslant 2(\mu(n)-m)$。这可由（2）推得。

（4）若$0<m<\mu(n)$，$\mu(n-m)\leqslant 2m$。

这只须令$m=\mu(n)-\{(3)$式中的$m\}$即可。

余下我们只须证明：若有 n根火柴，且在下轮至多可取q根，则当且仅当$\mu(n)\leqslant q$时，可获胜。

（1）若$\mu(n)>q$，则所有的取法留于位置n'、q'，由上面结论（4）有，$\mu(n')\leqslant q'+$

（2）若 $\mu(n)\leqslant q$，则我们或者能在这次取法中获胜（如果$q\geqslant n$），或着我们能够做成一着停留于位置 n',q' 的取法，使 $\mu(n')>q'$（由上面（1）知，我们只须取$\mu(n)$根火柴即可）。

综上，若$n=u_{k_1}+u_{k_2}+\cdots+u_{k_r}$，则取走$u_{kj}+u_{kj+1}+\cdots+u_{kr}$，其中$1\leqslant j\leqslant r$，且$j=1$或 $u_{kj-1}>2(u_{kj}+\cdots+u_{kr})$。

7．斐氏数列与象棋马步

国际象棋盘上的马能否从某点出发跳遍棋盘的所有点，且每点仅过一次？这是一个有趣的古典数学问题，常称为“骑士旅游”或“棋盘上马步哈密顿路线”问题。

与之同时还有一个问题：考虑一个能每步横跳m、纵跳n（或横跳n、纵跳m）格的马，称为(m,n)广义马，试问它能否跳遍棋盘的所有点？

特别地在格点平面上，(m,n)广义马从$O(0,0)$到$P(1,0)$的最少步数问题。胡久稔在文献

〔25〕中给出下面的结论（如图10—8）：

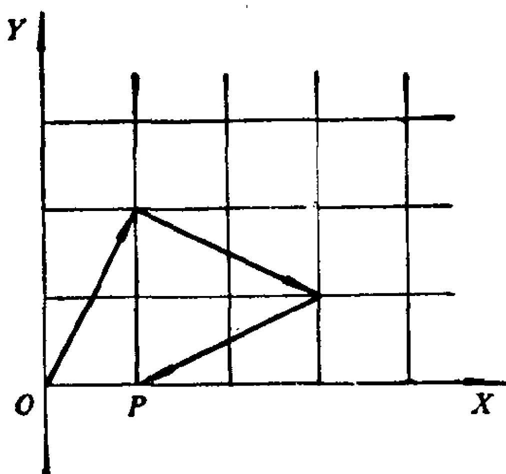


图 10—8

1. 对 $(n,n+1)$ 马，从O到P可用$2n+1$步达到。

2. 若相邻两斐波那契数u_{n+1}、u_n一奇一偶，则(u_{n-1},n_n)马可用u_{n+1}步从O跳到P点。

我们简要证明一下结论2。分两步完成。

（1）若 u_{n-1} 为偶的，u_n 为奇的，则由 $u^2_{n-1}-u_nu_{n-2}=(-1)^n$ $(n\geqslant 3)$，再构造$O\to P$的路线：

①正向跳(u_{n-1},u_n)马u_{n-1}步：

$(0,0)\to(u^2_{n-1},u_{n-1}u_n)$；

②反向跳(u_n,u_{n-1})马u_{n-2}步：

$(u^2_{n-1},u_{n-1}u_n)\to(u^2_{n-1}-u_nu_{n-2},u_nu_{n-1}-u_{n-1}u_{n-2})=((-1)^n,u^2_{n-1})$；

③跳u_{n-1}步(u_n,u_{n-1})马，其中对第二个分量

反向跳；对第一个分量正、反向各跳 $u_{n-1}/2$ 步（u_{n-1}是偶数），从而第一个分量不变，于是

$$((-1)^n,u^2_{n-1})\rightarrow((-1)^n,0)$$

若$((-1)^n,0)=(1,0)$，命题证毕；否则，可适当变化一下①、②、③步的正反向跳跃即可使$((-1)^n,0)=(1,0)$。

上面三步总步数为：

$$u_{n-1}+u_{n-2}+u_{n-1}=u_{n+1}$$

（2）若u_{n-1}为奇的，u_n为偶的，由

$u_{n-3}u_n-u_{n-2}u_{n-1}=(-1)^n$ $(n\geqslant4)$，再构造$O\rightarrow P$的路线：

①跳u_{n-3}步(u_n,u_{n-1})马，第一个分量正向，第二个分量反向，有：

$$(0,0)\rightarrow(u_{n-3}u_n,-u_{n-3}u_{n-1});$$

②跳u_{n-2}步(u_{n-1},u_n)马，第一个分量反向，第二个分量正向，有：

$$(u_{n-3}u_n,-u_{n-3}u_{n-1})\rightarrow(u_{n-3}u_n-u_{n-1}u_{n-2},$$
$$u_nu_{n-2}-u_{n-3}u_{n-1})=((-1)^n,u_nu_{n-2}-u_{n-3}u_{n-1});$$

③跳 $2u_{n-2}$步(u_n,u_{n-1})马，对第一个分量正、反各跳u_{n-2}步，对第二个分量反向，故有：

$$((-1)^n,u_nu_{n-2}-u_{n-3}u_{n-1})\rightarrow((-1)^n,u_nu_{n-2}$$
$$-u_{n-3}u_{n-1}-2u_{n-1}u_{n-2})=((-1)^n,-u_nu_{n-3});$$

④跳u_{n-3}步(u_{n-1},u_n)马（由于u_{n-1}为奇数，u_n为偶数，故u_{n-3}为偶数），对第一个分量跳

正、反向各 $u_{n-3}/2$ 步；对第二个分量跳正向．于是有：

$$((-1)^n, -u_n u_{n-3}) \to ((-1)^n, 0)$$

与前面类似，可适当变换步法，使 $((-1)^n, 0) = 1, 0)$。

上述跳法总步数为

$$u_{n-3} + u_{n-2} + 2u_{n-2} + u_{n-3} = u_{n+1}$$

由于 $(u_{n-1}, u_n) = 1$，即 u_{n-1}, u_n 互质，则 u_{n+1} 为最小者。

关于象棋马问题的其他细节，可以参看文献〔25〕。

8．斐氏数列的其他应用

斐氏数列还有许多应用，就其思想来讲当属递归函数．这种递推关系常可帮助我们解决许多问题。

比如我们把平面用 n 条直线所能分得的区域最大数记为 f_n，容易得到下面的递推关系：

$$f_{n+1} = f_n + (n+1), f_0 = 1$$

这样我们可有 $f_n = f_{n-1} + n = f_{n-2} + n + (n-1) = \cdots = f_0 + n + (n-1) + \cdots + 1 = 1 + n(n+1)/2$。

当然这个思想还可推广到平面切（分割）空间的块（区域）数问题上去等。

我们还想顺便讲一句：斐氏数列在解决希尔伯特第十问题*上也有着重要应用．关于它这儿不详谈了（可参看本丛书《希尔伯特第十问题》，胡久稔著）．

---

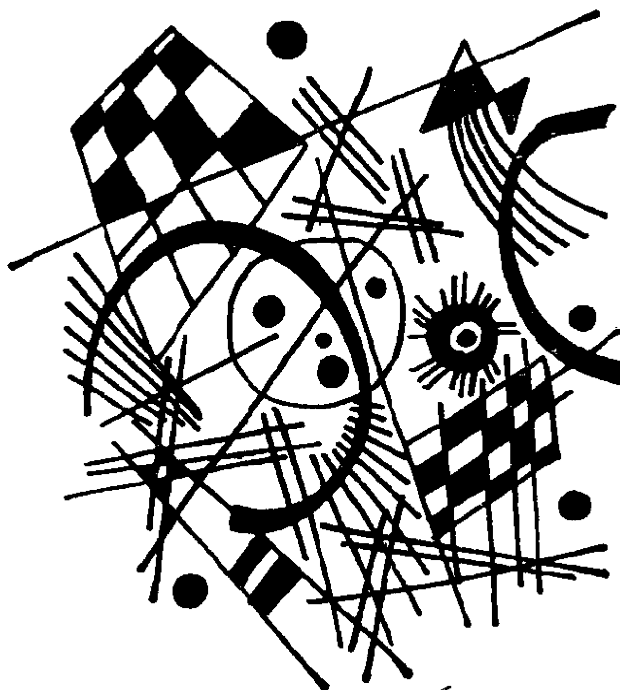
* 1900年德国数学家大卫·希尔伯特以题为《数学问题》的著名演讲，揭开了二十世纪数学发展的序幕．其主要部分是23个数学问题．

其中的第十个问题，即丢番图方程的可解性问题．

整系数不定方程的（整数）解的问题，为古希腊学者丢番图最早研究．著名的费尔马大定理（求 $x^n+y^n=z^n$ 的整数解，$n\geqslant3$）即为丢番图方程问题．希尔伯特第十问题是要寻求判定任一给出的丢番图方程有无整数解的一般方法．

1950年后，美国数学家戴维斯、鲁宾逊、普特南等在该问题研究上取得重大进展．1970年，苏联学者马卡谢维奇最终证明：希尔伯特期望的一般方法是不存在的．

十一 黄金数0.618…



前面我们已经证明，斐波那契数列前后两项之比的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\cdots$$

这个数就叫黄金数，以后我们用ω记它。关于它是与黄金比（或分割）有关系，这种黄金比的研究可以追溯到两千多年以前的古希腊时期，当时的数学家欧多克斯曾对此进行过研究。

若P分线段AB为大、小两段，且小段与大段之比恰好等于大段与全长之比（如图11—1），则称点P分线段AB成中外比，即

$PB:AP=AP:AB$



图 11—1

因为这种比在艺术和建筑上都很有用，中世纪意大利画家达、芬奇称中外比为黄金分割比（德国天文学家开卜勒曾称黄金分割为几何中两件瑰宝之一（另一件是毕达哥拉斯定理即勾股定理））。

它的值我们可以计算如下：

设$AB=1$，且$AP=x$，则 $PB=1-x$。

由题设$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1}$，

即 $x^2+x-1=0$，

解得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，余去负值则有：

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

它恰为我们前面提到的数值。

这位古希腊的柏拉图派学者欧多克斯还给出求线段黄金分割比的作图法（如图11—2）：

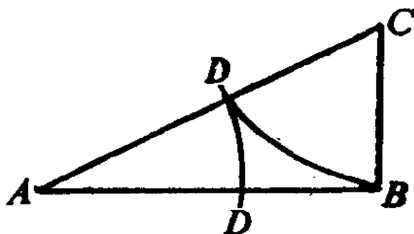


图 11—2

（1）过已知线段AB的端点B，作$BC\perp AB$，且使 $BC=\frac{1}{2}AB$；

（2）连AC，以C为圆心，CB为半径作圆弧交AC于D；

（3）以A为圆心，AD为半径作圆弧交AB于P，则P分AB成黄金分割。

点D也称线段AB的黄金分割点。

它的证明并不困难。

设$AB=a$，则$BC=a/2$，由勾股定理有

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5}a/2$$

$$AD = AC - DC = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

即 $AP = AD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$，此即说$P$分$AB$为黄金分割。

这种分割在平面几何中会遇到很多，其中值得一提的是：在五角星（或正五边形）中存在着许多黄金分割（如图11—3）：比如F分CA，G分CF等。这就是说在正五边形$ABCDE$中，对角线A与BD和BE分别交于G、F，则：

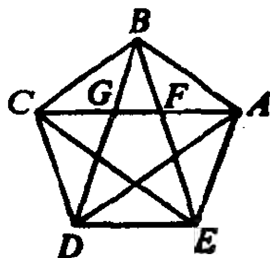


图 11—3

（1）$\frac{CF}{AC} = \frac{AF}{CF}$ 即$CF^2 = AC \cdot AF$；

（2）$\frac{CG}{CF} = \frac{FG}{CG}$ 即$CG^2 = CF \cdot FG$；

……

我们先来证明结论（1）．

因$AC \parallel DE$，$BE \parallel CD$，则$CDEF$是平行四边形．

故有

$EF = CD = AE = ED = FC$

因而 $\triangle AEF$是一个等腰三角形．由$\angle AFE$

$=\angle ACD$，则有

$$\triangle ACD \backsim \triangle EAF$$

故 $\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{AF}{AE}$，从而$\dfrac{CF}{AC}=\dfrac{AF}{CF}$。

顺便讲一句，因$CF=CB$（正五边形边长），这样：

正五边形边长与正五边对角线之比亦为ω。

关于结论（2），我们可以先证明一个更一般的结论，然后再由它推出（2）来。

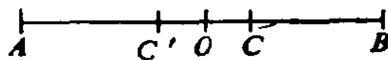


图 11—4

如图11—4，若C是线段AB的黄金分割点，O是AB中点，C'是C关于O的对称点，则C'为AC的黄金分割点。

这只须注意到：由对称性有$AC'=BC$，从而

$$\frac{AC'}{AC}=\frac{BC}{AC}=\omega$$

即点C'为AC的黄金分割点。

由上面的结论，我们不难证得结论（2）。

黄金数ω还可表示成无限根式的形式

1 $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots}}}$或$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}$或

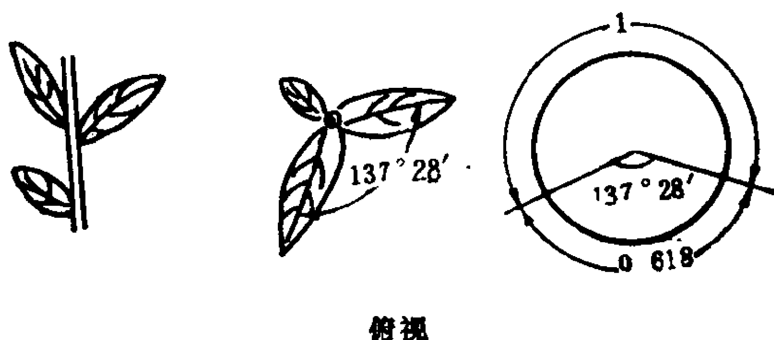
连分数形式$1+1+1+\cdots$。

关于黄金分割在几何上的出现，我们后面还要述及。这儿想告诉你几个有趣的自然现象，它

们都与黄金数0.618…有关。

人的肚脐是人体总长的黄金分割点，人的膝盖是人体肚脐到脚跟的黄金分割点（这一点早为古希腊人发现，并将它用于艺术雕塑中）。

更有意思的是：某些植物叶子在茎上的排列，也有黄金分割问题（如图11—5）。有人发现一些三轮叶的植物茎上两相邻叶片夹角是137°28′，经计算表明：



俯视

图 11—5

这个角度正是把圆周分成 1:0.618…的两条半径的夹角。

科学家研究发现：这种角度对于植物的通风和采光来讲都是最佳的。

前面我们已经讲过黄金数 $\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\cdots$ 满足方程 $x^2+x-1=0$，显然它的倒数 $u=\frac{1}{\omega}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$满足方程：

$y^2 - y - 1 = 0$，即 $y^2 = y + 1$

考察数列 1，$u, u^2, u^3, \cdots$，注意到：

$u^3 = u \cdot u^2 = u(u+1) = 2u + 1$

$u^4 = u \cdot u^3 = u(2u+1) = 2u^2 + u = 3u + 2$

$u^5 = u \cdot u_4 = u(3u+2) = 3u^2 + u = 5u + 3$

……

归纳地可有 $u^n = nu + (n-2)u$，这种数量关系在“五角星套”中也有直观的显现（见图11—6）。

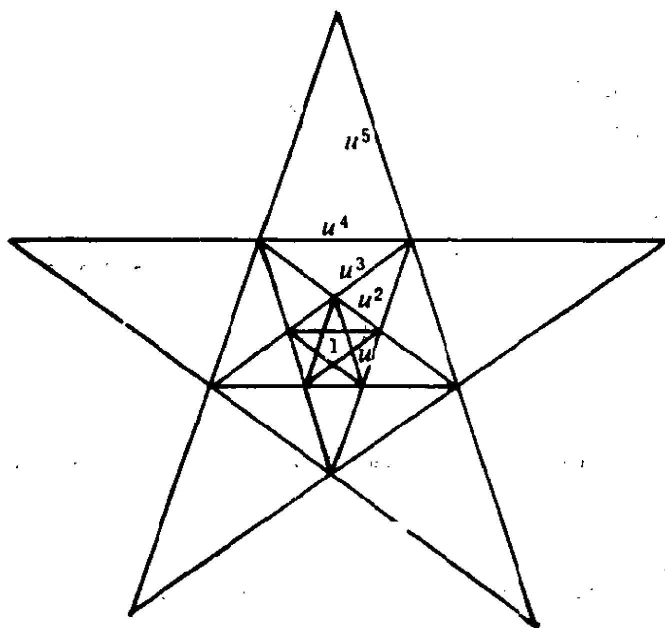
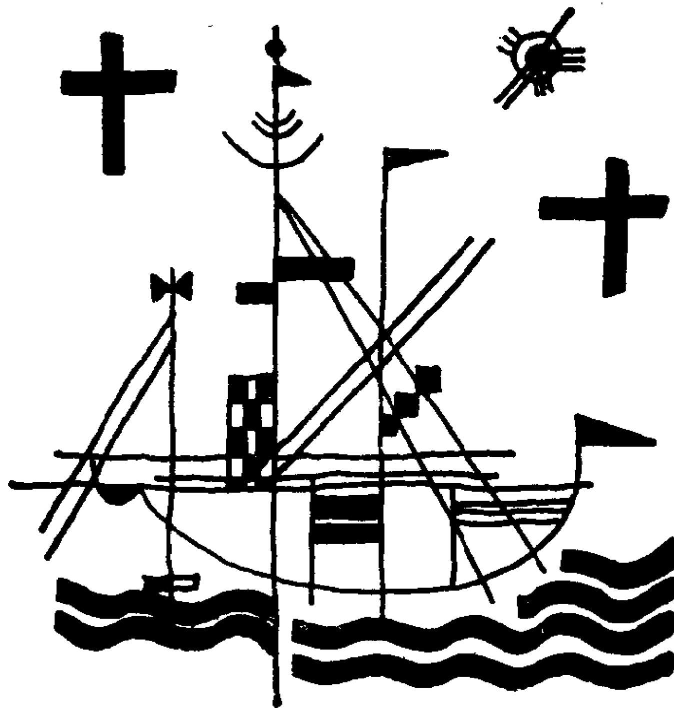


图 11—6

十二　黄金数与斐氏数列



我们已经指出：黄金数0.618… 与斐氏数列$\{u_n\}$之间有关系式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\omega$$

除此之外，它们还有一些关系。

我们先将比内公式改写一下，注意到：

$$-\omega=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\omega^{-1}=\frac{1}{\omega}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

这样

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[\omega^{-n}+(-1)^{n+1}\omega^n]$$

于是我们可推得斐氏数列与黄金数之间的一些关系式。

1. $u_n-\omega u_{n+1}=(-1)^{n+1}\omega^{n+1}$.

注意到 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}[\omega^{-n}+(-1)^{n+1}\omega^n]$及$\omega^2=$

$1\quad\omega$,

又 $\omega u_{n+1}=\dfrac{\omega}{\sqrt{5}}[\omega^{-(n+1)}+(-1)^{n+2}\omega^{n+1}]$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\omega^{-n}+(-1)^{n}\omega^{n+2}\right]$$

故 $u_n-\omega u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(-1)^{n+1}\omega^{n}-(-1)^{n}\omega^{n+2}\right]$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(-1)^{n+1}\omega^{n}+(-1)^{n+1}\omega^{n}(1-\omega)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[2\cdot(-1)^{n+1}\omega^{n}-(-1)^{n+1}\omega^{n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^{n+1}\omega^{n}\left(2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^{n+1}\omega^{n}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$=(-1)^{n+1}\omega^{n+1}$$

2. $\frac{u_2}{u_3}<\frac{u_4}{u_5}<\cdots<\frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}<\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+3}}<\cdots<\omega<\cdots$

$$<\frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}}<\frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}<\cdots<\frac{u_3}{u_4}<\frac{u_1}{u_2}.$$

由结论 我们有

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\omega+(-1)^{n+1}\frac{\omega^{n+1}}{u_{n+1}}$$

当n分别取奇、偶数时有

$$\frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}=\omega+\frac{\omega^{2n}}{u_{2n}}>\omega$$

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}=\omega-\frac{\omega^{2n+1}}{u_{2n+1}}<\omega$$

类似地有

$$\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+3}}=\omega-\frac{\omega^{2n+3}}{u_{2n+3}}$$

故 $$\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+3}}-\frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}=\frac{\omega^{2n+1}}{u_{2n+1}}-\frac{\omega^{2n+3}}{u_{2n+3}}$$

$$=\frac{\omega^{2n+1}}{u_{2n+1}}\left(1-\frac{u_{2n+1}}{u_{2n+3}}\omega^2\right)$$

因为 $0<\omega^2<1, 0<\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n+3}}<1$，故上式右大于0，从而

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}<\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+3}}$$

同理可证 $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}}<\dfrac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$.

注 由上结论我们还可以证得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\omega$$

3. 黄金数ω恒位于两相邻分数$\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$和

$\dfrac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$之间，且更靠近后一个分数，即

$$\left|\omega-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\right|<\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}-\omega\right|$$

证明只须注意到相邻的分数

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}、\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$$

总有一个处于分数列$\left\{\dfrac{u_k}{u_{k+1}}\right\}$的奇数位，而另一个则处于偶数位，但$\omega$位于它们之间。

由性质1知

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}-\omega\right|=\frac{\omega^{n+1}}{u_{n+1}},\quad\left|\omega-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\right|$$
$$=\frac{\omega^{n+2}}{u_{n+2}}$$

又$$\frac{\omega^{n+1}}{u_{n+1}}-\frac{\omega^{n+2}}{u_{n+2}}=\frac{\omega^{n+1}}{u_{n+1}}\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\omega\right)$$
$$>0,$$

故$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}-\omega\right|>\left|\omega-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\right|.$$

4．在所有分母不大于 u_{n+1} 的分数中，以$\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$最接近ω．

证明可由反证法来完成。若不然，设$\dfrac{a}{b}$($a>0$,

$0<b\leqslant u_{n+1}$) 比$\frac{u_n}{u_{n+1}}$更接近ω，即

$$\left|\frac{a}{b}-\omega\right|<\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}-\omega\right|$$

因 $$\left|\frac{a}{b}-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\right|=\left|\frac{a}{b}-\omega+\omega-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{a}{b}-\omega\right|+\left|\omega-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\right|$$

$$<\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}-\omega\right|+\left|\omega-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\right|$$

$$=\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\right|=\frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}}$$

这只须注意到：ω 位于$\frac{u_n}{u_{n+1}}$与$\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$之间。

故 $$\left|\frac{au_{n+2}-bu_{n+1}}{bu_{n+2}}\right|<\frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}},$$

即 $$\frac{|au_{n+2}-bu_{n+1}|}{b}<\frac{1}{u_{n+1}},$$

或 $$|au_{n+2}-bu_{n+1}|<\frac{b}{u_{n+1}}.$$

又 $b\leqslant u_n$,

故 $|au_{n+2}-bu_{n+1}|<1$.

而 上式式左为一非负整数，所以有

$au_{n+2}-bu_{n+1}=0$

或 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$.

但 $\dfrac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$是即约分数（因为u_{n+1}，u_{n+2}互质）

故$b=u_{n+2}>u_{n+1}$，这与$b\leqslant u_{n+1}$的假设相抵！

从而$\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$是分母不大于u_{n+1}的分数中最接近

ω的。

十三 黄金矩形、黄金三角、黄金椭圆



1. 黄金矩形

在美术家的眼里，黄金矩形——即长和宽的比为1∶0.618…的矩形最美（如图13—1）.

黄金矩形有许多有趣的性质，比如：

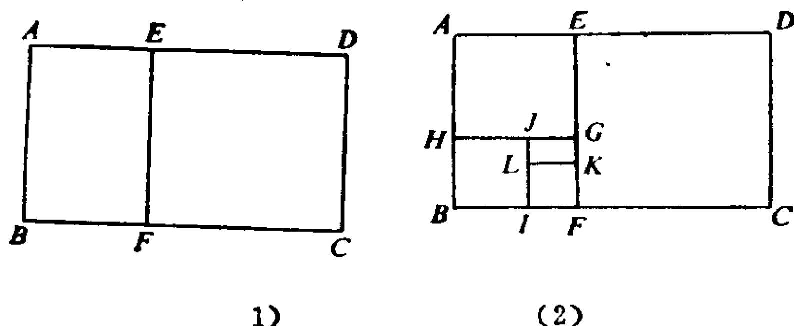


图 13—1

（1）在黄金矩形内作正方形$EFCD$，则矩形$ABFE$也是黄金矩形（如图13—1（1））.

这只须注意到CD是AD与$AD-CD$ 的比例中项即$\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{CD}{AD-CD}$.

（2）仿上若在矩形 $ABFE$ 中再作正方形$AHGE$，则矩形$BFGH$也是黄金矩形（如图13—

1（2））.

如此下去，可得一系列黄金矩形——黄金矩形套（或黄金矩形串）.

由此你也许会联想到ω的连分数表达式

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

的一个几何解释.

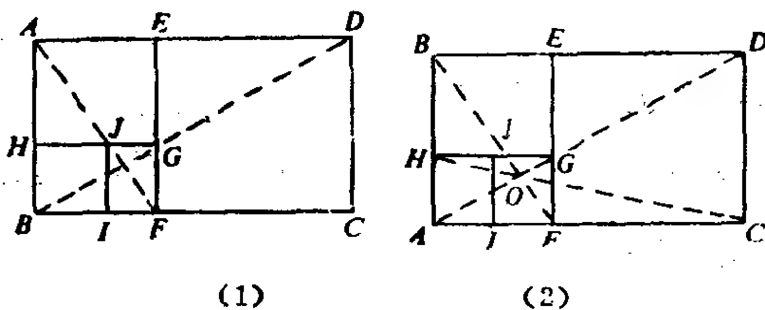
（3）黄金矩形都相似，且每两个相邻的黄金矩形的相似比为ω.

又若令 $AD=1$，则所得正方形串 $EFCD$、$AHGE$、$LIFK$、…的边长分别为$\omega,\omega^2,\omega^3,\cdots$

（4）如图 13—2(1)，D、G、B 三点共线，A、J、F三点共线；且$BD\perp AF$.

证明可由连GD、GB，由

$$\frac{AE}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}，即\frac{HG}{ED}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$



(1)　　(2)

图　13—2

$$又\quad\frac{HB}{HG}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}，即\frac{HB}{EG}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

而　$\angle GHB=\angle DEC=90°$，

故　$\triangle GHB\backsim\triangle DEG$。

从而　$\angle HBG=\angle EGD$，又$\angle HBG=\angle FGB$，

故　$\angle FGB=\angle EGD$，即D、G、B三点共线。

同理可证A、J、F三点共线.

（5）如图13—2（2），AF、BD、CH共线，设AF、BD的交点为O，连接OC、OH。

由$\angle FBO=ADO$，$\angle BFO=\angle DAO$。

故　$\triangle BFO\backsim\triangle ADO$。

因而　$\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{FB}{AD}=\dfrac{FB}{AB}\cdot\dfrac{AB}{AD}=\omega^2$，

又　$\dfrac{HB}{CD}=\dfrac{HB}{BF}\cdot\dfrac{BF}{CD}=\omega^2$，

以及　$\angle CDO=\angle HBO$，有 $\triangle CDO\backsim\triangle HBO$。

从而　$\angle COD=\angle HOB$，即COH为一直线，于是AF、BD、CH三线共点。

（6）如图13—2（2）有：$\dfrac{OA}{OD}=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{OF}{OB}=\dfrac{OG}{OF}=\omega$，$\dfrac{OH}{OC}=\omega^2$。

(7)点D、A、B、F、G、J、K、…在同一对数螺线上（如图13—3，对数螺线也是一种十分奇妙的

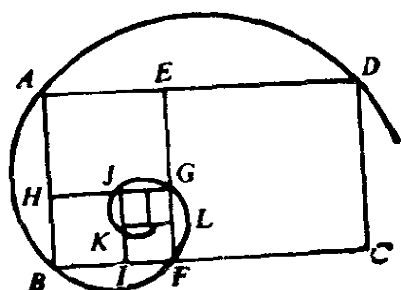


图 13—3

曲线）*.

这只须注意到以O为极点、OD为极轴建立极坐标系，则

$$OA = CO \cdot OD = OP \cdot e^{\frac{\pi a}{2}} \quad (a\text{为常数})$$

2. 黄金三角形

下面我们再来看看黄金三角形——底与腰之比为ω 的等腰三角形的一些性质.

首先我们容易证明：黄金三角形的顶角为36°，底角为72°，如图13—4（1）.

因 $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，又 $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin A}{\sin C}$，

---

* 在自然界，在生物中存在着许多螺线的例子，海螺的外壳呈螺线形，树藤按螺线状生长，蝙蝠按螺线飞行，向日葵在花盘上排列按螺线方式，人耳耳轮也存在着螺线，生物蛋白分子链的排列也呈现螺线，……

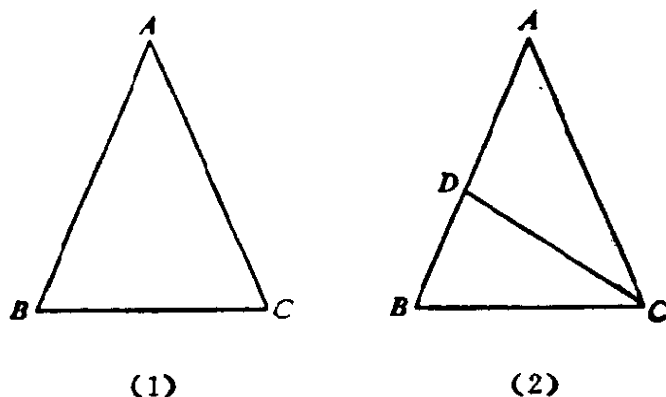


图 13—4

故 $\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

因 $C=90°-\dfrac{1}{2}\angle A$，故$\sin C=\cos\dfrac{A}{2}$.

又 $\dfrac{\sin A}{\sin C}=\left(2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}\right)/\cos\dfrac{A}{2}$

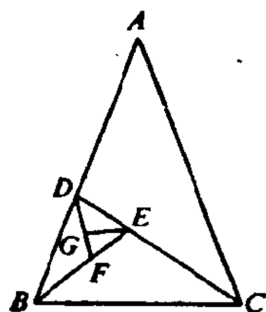
$=2\sin\dfrac{A}{2}$,

从而$\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}=\sin 18°$，故 $A=36°$.

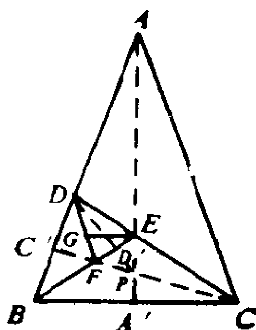
下面再来看它的几个性质：

（1）黄金三角形底角$\angle C$平分线CD交AB于D，则$\triangle CDB$也是黄金三角形.

因$\angle C=\dfrac{1}{2}(180°-36°)=72°$，故$\angle BCD=36°$. 又 $\angle B=72°$，从而$\triangle BCD$ 亦为黄金三角形，如图13—4（2）.



(3)



(4)

图　13—4

（2）仿上，作$\angle B$的平分线交CD于E，则$\triangle DBE$亦为黄金三角形，如此下去可得一黄金三角形串（或套），如图13—4（3）.

（3）所有黄金三角形均相似，且两相邻的黄金三角形的相似比为ω.

（4）若将黄金三角形串依次编号为$\triangle_1$，$\triangle_2$，$\triangle_3$，…，$\triangle_n$，…，则$\triangle_{n+3}$的左腰平行于$\triangle_n$的右腰.

（5）黄金三角形串$\{\triangle_n\}$中，$\triangle_n$、$\triangle_{n+1}$、$\triangle_{n+3}$的底面上高三线共点，如图13—4（4）.

这里只须证$\triangle ABC$、$\triangle CDB$、$\triangle DEF$底边上的高共线即可.

设AA'、CC'分别为$\triangle ABC$、$\triangle CBD$底边上的高.又设AA'、CC'交于P，连DP交EF于D'，又AA'过E，CC'过F.

因　$\angle PEF=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B=18^\circ+36^\circ=$

54°,

又 $\angle PFE=\frac{1}{2}\angle B\quad\frac{1}{4}\angle C=36^\circ+18^\circ=$ 54°.

故 $\angle PEF=\angle PFE$，从而 $PE=PF$，又 $DE=DF$，

从而 $\triangle PED\cong\triangle PFD$.

故 $\angle PDE=\angle PDF$，于PD为$\triangle EFD$中顶角平分线，即底边EF上高线.

因此 $\triangle ABC$、$\triangle CDB$、$\triangle DEF$ 底边上三条高线共点于P.

（6）黄金三角形串$\{\triangle_n\}$中相邻三个三角

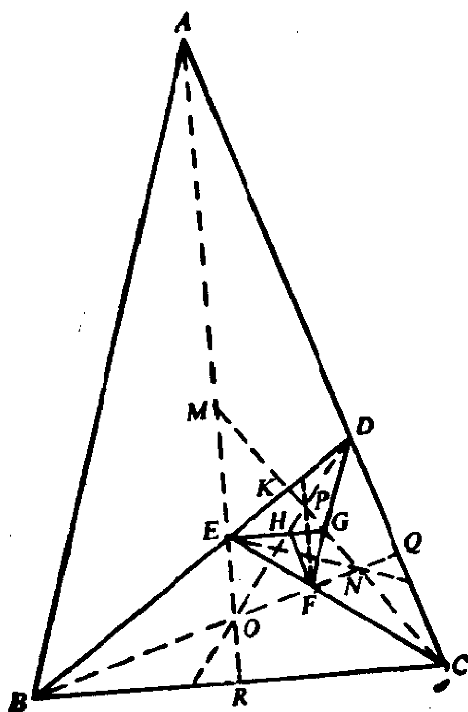


图 13—5

形：$\triangle_n$，$\triangle_{n+1}$，$\triangle_{n+1}$底边上的高所在的直线围成的三角形亦为黄金三角形。

如图13—5，若AR，BQ，CK为$\triangle ABC$、$\triangle BCD$，$\triangle CDE$底边上的三条高线，它们围成的三角形为$\triangle OMN$。

在$\triangle OMN$中，由题设不难有：

$$\angle OMN=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{4}\angle ACB=18°+18°=36°,$$

$$\angle ONM=\angle CNQ=90°-\frac{1}{4}\angle ACB=90°-18°=72°,$$

$$\angle NOM=\angle BOR=90°-\frac{1}{4}\angle ABC=90°-18°=72°.$$

显然，$\triangle OMN$为黄金三角形。

仿上证明，我们还可以有下面的结论：

（7）在图13—5中，继续作原三角形串中各三角形底边上的高，也得到一连串的黄金三角形：$\triangle OMN$，$\triangle ONP$，$\triangle NPF$，…

若记$\triangle'_n$为黄金三角形$\triangle_{n-1}$分割出$\triangle_n$后所余下的三角形，则$\triangle_n'$为底角是36°的等腰三角形。又若记O_n为$\triangle_n'$的外接圆圆心，则有

(8)$\triangle_n'$($n\geqslant 2$)的外接圆与$\triangle_n$的一腰相切，切点为$\triangle_n$的顶点。

如图13—6，设$\triangle ABC$为$\triangle_1$，$\triangle CBD$为$\triangle_2$，$\triangle ACD$为$\triangle_2'$。

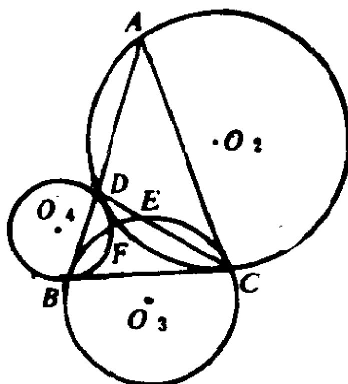


图 13—6

因$\triangle CBD \backsim \triangle ABC$，故$\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{BA}$，

即$BC^2=BD \cdot BA$。

而BDA为$\odot O_2$的割线，C点在$\odot O$上，所以BC是$\odot O_2$的切线。

同理，由$\triangle_n \backsim \triangle_{n-1}$，知$\triangle_{n-1}$的底边是$\triangle_n$的底边与$\triangle_{n-1}$腰的比例中项，且$\triangle_{n-1}$的腰是$\odot O_n$的割线，$\triangle_n$的顶点在$\odot O_n$上，所以$\triangle_n'$的外接圆与$\triangle_n$的一腰相切，且切点为$\triangle_n$的顶点。

同样地，我们不难证明：

（9）$\triangle'_{n+1}$的外接圆与$\triangle_n$的两腰相切，且$\triangle_n$的两个底角的顶点为切点。

3. 黄金椭圆

最后我们谈谈所谓“黄金椭圆”。

设c为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的焦半径（$c^2=a^2-b^2$），若以$c$为半径的圆（称为该椭圆的伴随

焦点圆）面积与该椭圆面积相等，则$\frac{b}{a}=\omega$，且称此种椭圆为黄金椭圆，如图13—7。

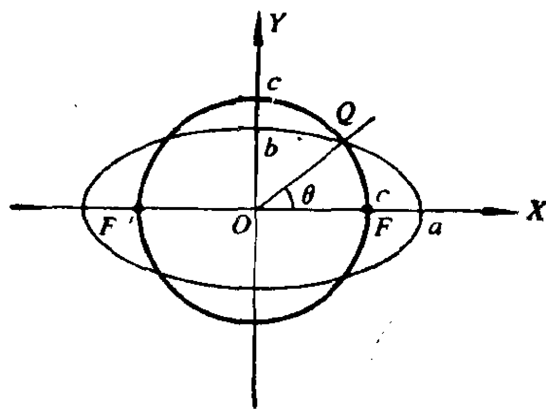


图 13—7

由椭圆面积$S_{椭圆}=\pi ab$，

又圆面积$S_{圆}=\pi c^2$，

若$S_{椭圆}=S_{圆}$，则有$\pi c^2=\pi ab$。

即$c^2=ab$，注意到$c^2=a^2-b^2$，

故 $a^2-b^2=ab$或 $a^2-ab-b^2=0$。

由上可解得： $b=\frac{-a\pm\sqrt{5}a}{2}$，

舍去负值故有 $b=\frac{-a+\sqrt{5}a}{2}$。

从而 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\omega$。

黄金椭圆有如下一些性质：

（1）黄金椭圆的面积$S=\pi\omega a^2$。

这个结论是显然的，因为$b=\omega a$。

（2）黄金椭圆与其焦点圆在第一象限的交点为$Q(b, \sqrt{\omega}\ b)$。

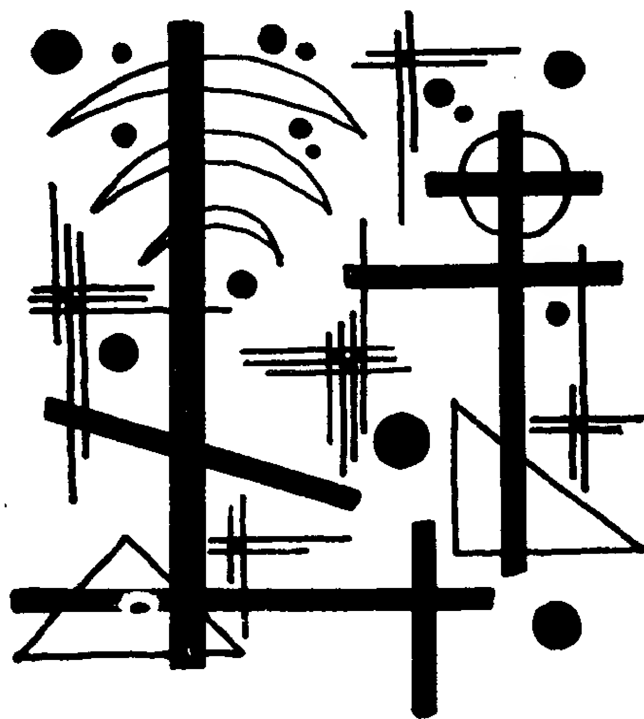
这只须解下面的方程组即可：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ x^2+y^2=a^2-b^2 \end{cases}$$

（3）过原点和Q点（椭圆与其焦点圆在第一象限交点）的直线l 与X 轴的正向夹角为 θ，则

$$\text{tg}\theta = \cos\theta = \sqrt{\omega}\,,\ \sin\theta = \omega$$

十四　黄金分割与优选法及其他



中世纪意大利画家达·芬奇把中外比誉为“黄金比”，顾名思意，这种比有黄金般的价值。

无论是古埃及的金字塔、古希腊雅典的他农神庙，还是巴黎的圣母院、印度的泰姬陵，以至近世纪法国的埃菲尔铁塔上，研究者发现不少与黄金比有联系的数据——人们发现：这种比用于建筑上，可除去人们视觉上的凌乱，加强建筑形体的统一与和谐。

从艺术上看，一些名画雕塑中的主题，也大都在画面的 0.618…处，连弦乐器的声码放在琴弦的0.618…处也会使琴声更加甜美。

上个世纪末，德国心理学家费希纳曾做过一次试验，他展出十种不同规格（长宽之比不同）的长方形让观众挑选自己认为最喜欢的一种，结果表明：大多数人选择于长、宽之比为黄金比或接近这种比的长方形（有一说这与人眼睛的“错觉”有关，美术家常把正方形的上横边画的下横边稍短，这种正方形叫“视觉正方形”）。

几千年来，人们的审美观点没有发现变化，这是何原因？新近人们的研究发现：这与人脑电波的波长或频率有关。据说占人脑电波高低频主导地位的频带平均值的比值约为：

12.87:8.13≈1.618…（或8.13:12.87≈0.618…）

科学家们也发现了人的情绪影响着人脑电波的波频比，这也解释了为什么有些名画的主题并没有画面的黄金分割点处的因由。

黄金数在几何、三角解题上也有应用，比如我们知道：

$$\sin 18_{\circ}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\ \ =\frac{\omega}{2}$$

这样我们便可有

$$\cos 18^{\circ}=\frac{1}{2}\sqrt{3+\omega}$$

$$\sin 36^{\circ}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\omega}\ ,\ \cos 36^{\circ}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\omega}$$

1. 黄金数在几何作图上的应用

更重要的是黄金分割常用于几何作图上。比如：

（1）作已知圆的内接正十边形、正五边形。

注意到半径为R的圆的正十边形边长：

$a_{10}=2R\sin18^{\circ}=\omega R$

这样可有作法（如图14—1）：

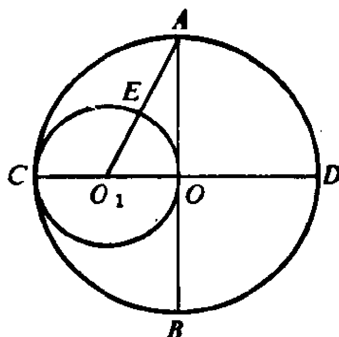


图 14—1

作⊙O 的两条互相垂直的直径AB、CD，再以CO中点O_1 为圆心$\frac{1}{2}CO$为半径作圆O_1，连AO_1交⊙O_1于E，则$AE=a_{10}$。

已知圆的内接正五边形的作法可由正十边形直接得到。

（2）已知一边作正五边形。

只须注意到正五边形边长与其对角线长之比为ω既可。设边长为a，对角线长为x，由

$$\frac{a}{x}=\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

有 $$x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a=\frac{a}{2}+\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

显然，x 可以作出，则该正五形边亦可以作出（见图14—2，作法略）。

（3）已知一边长，作正五角星。

此即说已知正五形对角线长，作此正五边形。

仿上作法，此正五边形不难作出，进而五角星亦可作出。

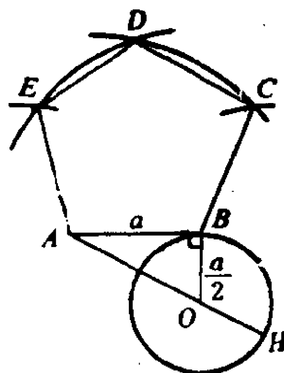


图 14—2

2．黄金数在连分数理论上的应用

我们来看看黄金数在连分数理论中的一个应用。

若记$\alpha=[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},r_n]$；且 $[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_k]=\frac{p_k}{q_k}$，称为$\alpha$ 的k 阶近似（渐近）分数，则有：

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q_k^2},\quad\left|\alpha-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q_{k-1}^2}\quad\left|\alpha-\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q_{k-1}^2}$$

中至少一个成立。

为此我们先来证明：若$\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}=\varphi_k$，$\varphi_k+r_k=\psi_k$，且 $\psi_k\leqslant\sqrt{5}$，$\psi_{k-1}\leqslant\sqrt{5}(k\geqslant2)$，则 $\varphi_k>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

事实上，由$\frac{1}{\varphi_{n+1}}=\frac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\varphi_n$（*）和

$r_n=a_n+\frac{1}{r_{n+1}}$，有$\frac{1}{\varphi_{n+1}}+\frac{1}{r_{n+1}}=\varphi_n+r_n=\psi_n$。

由引理条件有 $\varphi_k+r_k\leqslant\sqrt{5}$，$\frac{1}{\varphi_k}+\frac{1}{r_k}\leqslant\sqrt{5}$

故$(\sqrt{5}-\varphi_k)\left(\sqrt{5}-\frac{1}{\varphi_k}\right)\geqslant1$。

或者因φ_k是有理数，$5-\sqrt{5}\left(\varphi_k+\frac{1}{\varphi_k}\right)>0$，

由$\varphi_k>0$有 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\varphi_k\right)^2<\frac{1}{4}$，进而可有

$$\frac{\sqrt{5}}{2}-\varphi_k<\frac{1}{2},\quad \varphi_k>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

我们再用反证法来证明前面的结论。

若不然，今设$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}$ ($n=k,k-1,k-2$)

由连分数性质及分式有：

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|\frac{p_nr_{n+1}+p_{n-1}}{q_nr_{n+1}+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}\right|=$$

$$\frac{1}{q_n(q_nr_{n+1}+q_{n-1})}=\frac{1}{q_n^2(r_{n+1}+\varphi_{n+1})}$$

$$=\frac{1}{q_n^2\psi_{n+1}}$$

故 $\psi_{n+1}\leqslant\sqrt{5}$ $(n=k,k-1,k-2)$。

由前证 $\varphi_k>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\varphi_{k+1}>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

及(*)式有

$$a_k=\frac{1}{\varphi_{k+1}}-\varphi_k<\frac{2}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1$$

这不可能，此即说上设不真，从而命题成立。

3．黄金数与优选法

说到黄金数0.618…的应用，其中最重要的还要数它在优选法中应用。

优选法是本世纪五十年代开始发展起来的一门应用科学，我们在斐氏数列的应用一节中已经谈了这方面的问题。下面我们谈谈另外一种求一维搜索的最优方法——0.618法。

今仍然是要求区间$[a,b]$上的单峰函数$f(x)$的极小值或极小点。

如图14—3，我们在$[a,b]$内取两点x_1、$\tilde{x}_1$且

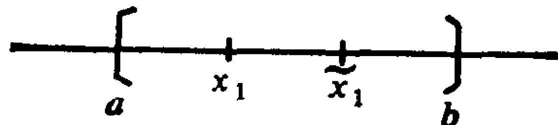


图 14—3

$x_1<\tilde{x}_1$。然后比较$f(x_1)$和$f(\tilde{x}_1)$ 的大小，以决定极小点在$[a,\tilde{x}_1]$内还是在$[x_1,b]$内。于是取小区间代替$[a,b]$，如是便缩小了区间的长度。记新区间为$[a_1,b_1]$。

仿上步骤可得区间串$[a_2,b_2]$,$[a_3,b_3]$,…

这里的关键是如何选 $x_k,\tilde{x}_k$。因每次比较两点的函数值后区间得到缩小，如果缩小区间后保留的一点仍能使用，则我们除开始的区间要计算两点函数值外，以后每步仅需计算一个函数值就行了，这样便大大地节省了运算。

假定每次迭代区间的长度按α倍$(0<\alpha<1)$缩小，经迭代后的区间长度或是$[a,a+\alpha(b-a)]$，或是$[b-\alpha(b-a),b]$，即$x_1=b-\alpha(b-a)$，$\tilde{x}_1=a+\alpha(b-a)$。

若下一个区间是$[a,a+\alpha(b-a)]$，由上面的讨论应取

$$x_2=b_1-\alpha(b_1-a_1)=a_1+(1-\alpha)(b_1-a_1)$$

$$\tilde{x}_2=a_1+\alpha(b_1-a_1)$$

注意到 $a_1=a$，$b_1=a+\alpha(b-a)$，故 $x_2=a+\alpha(1-\alpha)(b-a)$

$$\tilde{x}_2=a+\alpha^2(b-a)$$

因缩小区间是除去了$(\tilde{x}_1,b]$，故x_1仍留在$[a,\tilde{x}_1]$内。

计算$f(x_1)=f(a+(1-\alpha)(b-a))$，故在新区

间我们自然希望x_2或$\tilde{x}_2$之一与x_1重合，这样便可少算一次函数值。

注意到 $x_1 = a + (1-\alpha)(b-a)$，故 α只须满足：

$$1-\alpha = \alpha(1-\alpha) \quad (\text{当 } x_1 = x_2 \text{时})$$

或 $$1-\alpha = \alpha^2 \quad (\text{当} x_1 = \tilde{x}_2 \text{时})$$。

前者得$\alpha = 1$不妥，而后者即由 $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ 解得 $\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$，舍去负值，即 $\alpha = \omega$。

同样，对$x_1 = \tilde{x}_2$也有类似的结论。

此即说：区间$[a_k, b_k]$确定之后，可取

$$x_{k+1} = a_k + (1-\omega)(b_k - a_k)$$

$$\tilde{x}_{k+1} = a_k + \omega(b_k - a_k)$$

这就是人们常称的0.618法。

注 下面是0.618法的算法步骤：

给定a、b和$\omega = 0.618033988$，及精度ε。

1. 求$x_1 = a + (1-\omega)(b-a)$，$x_2 = a + \omega(b-a)$，$f(x_1) = f_1$，$f(x_2) = f_2$。

2. 若$|b-a| \leqslant \varepsilon$，求出近似最优解$x^* = \frac{1}{2}(a+b)$；否则转3。

3. 若$f_1 < f_2$，则置$a = a$，$x_2 = b$，$x_1 = x_2$，$f_1 = f_2$，转4；

若$f_1 > f_2$，则置$x_1 = a$，$b = b$，$x_2 = x_1$，$f_2 = f_1$，转5；

若$f_1 = f_2$，则置$x_1 = a$，$x_2 = b$，转1。

4. 求$x_1 = a + (1-\omega)(b-a)$，置$f(x_2) = f_1$ 转2。

5．求$x_2=a+\omega(b-a)$，置$f(x_2)=f_2$，转2。

关于 0.618 法的最优性的证明可详见文献〔19〕。下面我们给出一个较为直观的说明：

为方便起见我们把（试验范围）区间长度视为1，即区间为〔0，1〕，如图14—4。

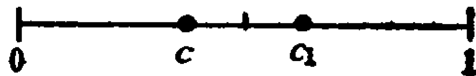


图 14—4

为比较结果，我们至少要取两点c、c_1，计算完函数值后，可能去掉区间〔0，c）或（c_1，1〕，因去掉它们的可能是相等的，故应适合关系式：

$c=1-c_1$

此即说c、c_1是两个对称点。

若计算比较后去掉（c_1，1〕，留下〔0，c_1〕，而c点应为〔0，c_1〕中位置与c_1在〔0，1〕中所处位置的点，即它们的比应相等：

$1:c_1=c_1:c$，或 $c_1^2=c$

又由$c=1-c_1$，从而有$c_1^2+c_1-1=0$。

解得$c_1=\omega$（只取正根）．

4．黄金数的其他应用

最后我们也想谈谈黄金数在火柴游戏的一种

玩法中的制胜作用。

有两堆火柴，每堆火柴数目任意（但不相等）。

两人轮流从中取出一部分，规定每人每次可从其中一堆取任意多（包括全部拿走）；也可从两堆中同时取，但要求在两堆中所取数目一样。但不许一根不取。

胜负判断是：谁拿到最后一根火柴谁赢。

这个游戏称“惠特霍夫游戏”，因为惠特霍夫发现了它的制胜秘诀：

当你取完火柴后留下的两堆火柴分别为：

$$\left[\frac{n}{\omega}\right]\text{和}\left[\frac{n}{\omega^2}\right]$$

时，你总可取胜，这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数。

比如对于一些 n 可有下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
$[n/\omega]$	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	…
$[n/\omega^2]$	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	…

惠特霍夫还发现：

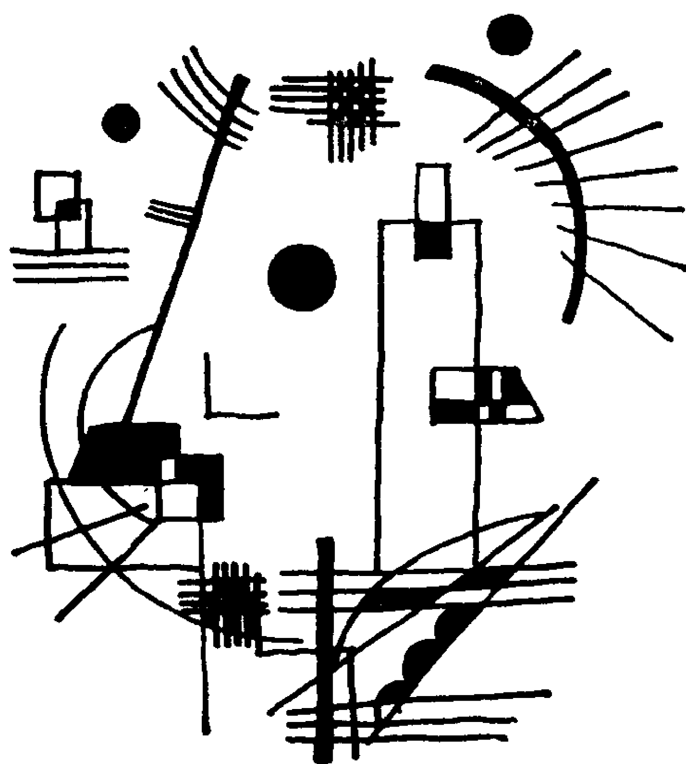
$[n/\omega]$和$[n/\omega^2]$总括了全部自然数，且既不重复，也无遗漏！

如果，你记住了上表中的数字对（1，2），你可按下面办法递推：若 $1\sim n-1$ 对数都排好

了，则第n 对数之一是前面数对中没有出现的最小自然数，把它再加上序号 n，便是数对中的另一个数。

比如第4对数，因前面三对数中已出现1、2、3、4、5、6、7，而1～7之间没出现的最小自然数显然是6，它是第4对数中的一个；另一个为6＋4＝10。

十五 杨辉(贾宪)、巴斯卡三角



前面的章节里我们讲了与斐氏数列有关联的数字三角形——杨辉三角，下面我们来谈谈它。

1. 杨辉（贾宪）、巴斯卡三角

我国宋代数学家杨辉的著作《详解九章算法纂类》里(1261年)，刊载了上述数字三角，在那儿叫“开方作法本源”图（如图15—1)，又称“平方求廉图”．杨辉还解释说：此图源于《释锁算书》（此书系公元1100年以前的著作，但已失传），早为贾宪所用来开方。

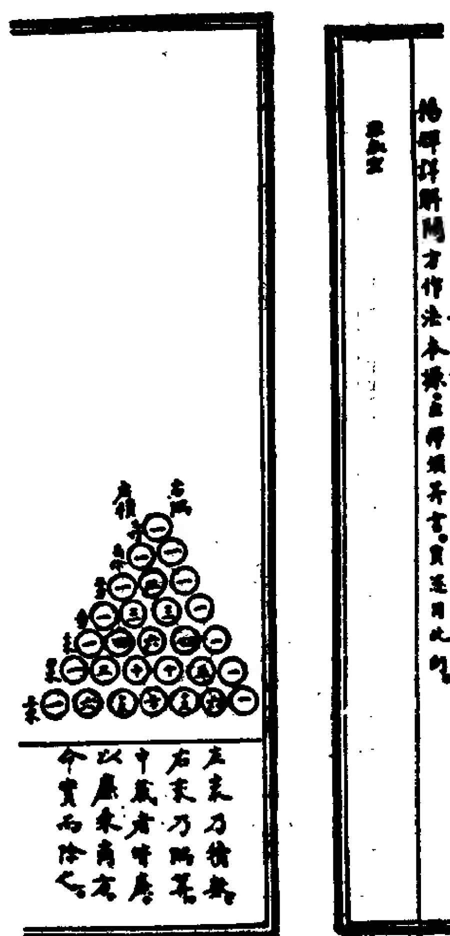


图　15—1

由于这个图形呈三角状，又是第一次在杨辉的著作中刊载，后人便称之为杨辉三角，也有人认为称贾宪三角似乎更为妥切。

1303年，我国数学家朱世杰在《四元玉鉴》一书中也刊载，在那儿称为“古法七乘方图”

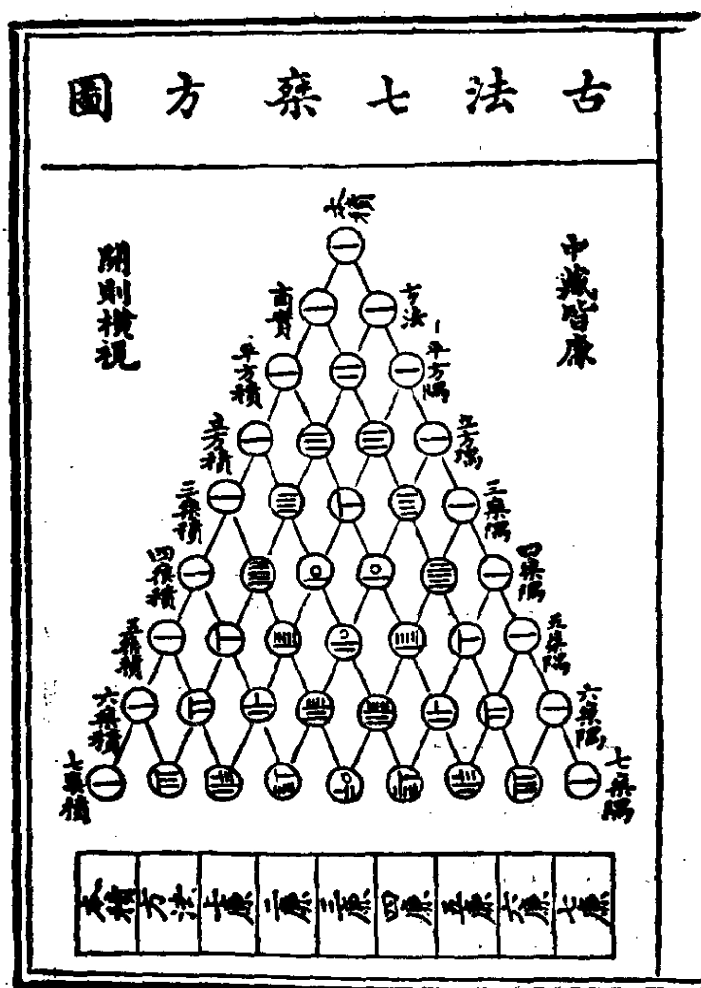


图 15—2

（如图15—2），只不过书中的图形是用“算筹”符号表示的。

杨辉三角在国外又称巴斯卡三角。巴斯卡是十七世纪法国著名的数学、物理和哲学家，他在《算术三角形专论》一书中给出了下面的图形，且用它进行某些计算（此书是在1665年他死后出版的）。

据载，1527年出版的阿皮亚尼斯的《算术》

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

一书，也曾以此图形作为该书封面。

但这比起在中国的发现来，至少要晚300年。

杨辉三角与二项式展开有关，它的各行分别是二项式 $(a+b)^k$ （$k=0,1,2,\cdots$）展开后的诸系数，注意到

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad (*)$$

这样杨辉三角可写成：

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
\cdots & & & \cdots\cdots & & & \cdots \\
C_n^0 & & C_n^1 & \cdots & C_n^{n-1} & & C_n^n \\
\cdots & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \cdots
\end{array}
$$

杨辉三角有许多性质，比如，若把杨辉三角中自上而下的各行分别叫做第0行、第1行、…第 n行的话，则：

(1) 各行中的诸数关于中心对称。

这只须注意到组合等式：$C_n^m = C_n^{n-m}$ 即可。

(2) 第n行诸数之和为2^n.

这只要注意到组合等式：

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n$$

即可.它实际上是在(*)式中令$a=b=1$得到的。

(3) 各行中诸数相间地冠以正、负号后再相加，它们的和为0。

这只须在(*)式中令$a=1, b=-1$或$a=-1$, $b=1$即可，此时

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$$

(4) 若p是一个质数，则杨辉三角中第p行除两端的1以外都是p的倍数。因$C_p^k=\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$ $(k=1,2,\cdots,p-1)$

又p是质数，则p与$k!$中每个因数均互质，故$(p,k!)=1$.

C^k_p是整数，则$p\mid C_p^k$.

注 这个结论是充要的.

(5) 杨辉三角中的第$2^k-1(k=0,1,2,\cdots)$的数字全是奇数.

注意到表中第2^k-1行的前两个数是1、2^k-1，它们均为奇数，其后的诸数是

$$C^r_{2^k-1}=\frac{(2^k-1)\ (2^k-2)\cdots(2^k-r)}{r!}\quad (r=2,3,\cdots,2^k-1)$$

而 $C^r_{2^k-1}=\frac{2^k-1}{1}\cdot\frac{2^k-2}{2}\cdot\frac{2^k-3}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2^k-r}{r}$

若r是2的方幂：$r=2^l$（l是自然数），则

$$\frac{2^k-r}{r}=\frac{2^k-2^l}{2^l}=\frac{2^{k-l}-1}{1}$$

是奇数；

若r不是2的方幂，则r可分解为$r=2^t\cdot p$形

式（p为奇数，t为非负整数），这时：

$$\frac{2^k-r}{r}=\frac{2^k-2^tp}{2^tp}=\frac{2^{k-t}-p}{p}$$

其分子、分母均为奇数。

这样，$C^r_{2^k-1}$ $(r=2,3,\cdots,2^k-1)$都是奇数。

注 这个结论的逆命题也成立。此外它还可以推广为：

若p是质数，且$p\nmid C_n^r(0\leqslant r\leqslant n)\Longleftrightarrow n=ap^m-1$，$1\leqslant a\leqslant p$，$m\geqslant 0$的整数。

(6) 杨辉三角中第 $2^k(k=1,2,\cdots)$行除两端的1之外都是偶数。

这只须注意到：$C_n^r=C^r_{n-1}+C_{n-1}^{r-1}$即可。

(7) 杨辉三角各斜行（1走向）自上而下之和为其最后一项的右下角的数，写成组合式即：

$C^r_r+C^r_{r+1}+C^r_{n-1}=C_n^{r+1}$ $(n>r)$（ ** ）

如图15—3，直接验算我们可有：

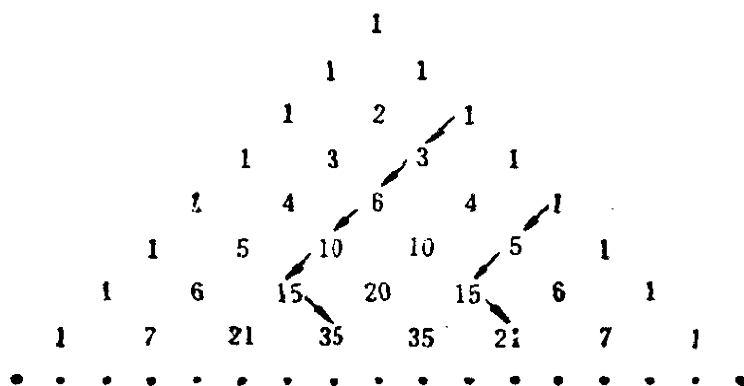


图 15—3

$$1+5+15=21$$

$$1+3+6+10+15=35$$

等。

下面我们用数学归纳法（对n归纳）证明上式。

1）$n=r+1$时，(**)式左 $=1$，式右 $=C_{r+1}^{r+1}=1$，命题成立。

2）设$n=k$（$k>r$）时命题真确，即

$$C_r^r+C^r_{r+1}+\cdots+C^r_{k-1}=C_k^{r+1}$$

今考虑$n=k+1$的情形，上式两边同加C^r_k：

$$C_r^r+C^r_{r+1}+\cdots+C^r_{k-1}+C^r_k=C_k^{r+1}+C^r_k$$

由 $C_k^r+C_k^{r+1}=C_{k+1}^{r+1}$，故有

$$C_r^r+C^r_{r+1}+\cdots+C^r_{k-1}+C^r_k=C_{k+1}^{r+1}$$

即$n=k+1$时命题也真，从而对任何自然数命题都成立。

注 这个命题的证明还可由下面的方法完成：

$$C_r^r+C^r_{r+1}+\cdots+C^r_{n-1}$$

$$=C^{r+1}_{r+1}+(C^{r+1}_{r+2}-C_{r+1}^{r+1})+(C_{r+1}^{r+3}-C_{r+2}^{r+1})+\cdots+(C^{r+1}_{n-1}-C_{r+1}^{n-2})+(C_n^{r+1}-C_{r+1}^{n-1})=C_n^{r+1}$$

若将上式改写成：

$$C^r_r+C^r_{r+1}+\cdots+C^r_{r+n-1}=C^{r+n}_{r+1}$$

则利用它可计算一些自然数（所谓高阶等差数列）的和（式(**)本身是一个r阶等差数列之和）。

例如$r=1,2,3$分别有等式：

$$1+2+3+\cdots+n=C^2{}_{n+1}=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)=C^3{}_{n+2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$$1+4+10+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)=C^4{}_{n+3}=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

由上面的式子我们还可得到：

$$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}[1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)]=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

一般地，若将(**)两边同乘$r!$则可有：

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots r+2\cdot 3\cdots(r+1)+\cdots+n(n+1)\cdots(n+r-1)=\frac{1}{r+1}n(n+1)\cdots(n+r)$$

若把二项式 $1+\omega$ 的各次方幂排成杨辉三角形状：

$$1$$

$$1+\omega$$

$$1+2\omega+\omega^2$$

$$1+3\omega+3\omega^2+\omega^3$$

$$1+4\omega+6\omega^2+4\omega^3+\omega^4$$

$$\cdots\cdots$$

则它中间项之和满足关系式：

(8) $1+C^1{}_{k+2}\omega+C^2{}_{k+4}\omega^2+\cdots+C^n{}_{k+2n}\omega^n+$

$$\cdots = \frac{1}{\sqrt{1-4\omega}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4\omega}}{2\omega}\right)^k.$$

这只须注意到：对任意有理数α、β，有

$$1 + C^1_{\alpha+\beta}\ \omega + C^2_{\alpha+2\beta}\omega^2 + \cdots + C^n_{\alpha+n\beta}\omega^n + \cdots$$

$$= \frac{(1+z)^\alpha}{1-\omega\beta(1+z)^{\beta-1}} = \frac{x^{\alpha+1}}{(1-\beta)x+\beta} (*)$$

这里$1+z=x$，x是$1-x+\omega x^\beta=0$的根。

而(*)式则由$\frac{f(z)}{1-\omega\varphi'(z)}=$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!}\left[\frac{d^n f(x)[\varphi(x)]^n}{dx^n}\right]_{x=0}$$

中令$\varphi(z)=(1+z)^\beta$，$f(z)=(1+z)^\alpha$得到，其中

$$\omega=\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^k,\ z=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\omega,\ \varphi(z)=z/\omega$$

由之有 $z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}[\varphi(x)]^n}{dx^{n-1}}\right]_{x=0}$

及$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{n}\left[\frac{d^{n-1}f'(x)\ [\varphi(x)]^n}{dx^{n-1}}\right]_{x=0}$

下面几个杨辉三角的性质，是组合分析与数论交界领域中的奇妙结果。

(9)若令g是n表示成二进制时它所含1 的个数，则杨辉三角第n行中奇数的个数是2^g.

我们先来看看下面的表：

n	杨辉三角	n的二进制表示	g
0	1	0	0
1	1 1	1	1
2	1 2 1	10	1
3	1 3 3 1	11	2
4	1 4 6 4 1	100	1
5	1 5 10 10 5 1	101	2
6	1 6 15 20 15 6 1	110	2
7	1 7 21 35 35 21 7 1	111	3
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	1000	1
…	……………………	…	…

它的证明较为复杂，这里给出它的证明大意：

因奇数的C^r_n的个数即是模2不同余0的C_n^r的个数。

若记模p不同余0的C_n^r的个数为$T(n)$，这里p是质数，若n的p进制表示为：

$$n = n_k n_{k-1} \cdots n_1 n_0$$

则$T(n) = \prod_{i=0}^{k}(n_i + 1)$.

此即说：将它的每个p进制中的数字加上1再连乘起即为$T(n)$.

就二进制而言，这些数字是0或1，故当$p=2$时，$T(n)$的诸因子均为1或2．如果，n的二进制表示中每有一个1，则$T(n)$中就有一个2，从而

$T(n)=2^g$

注 顺便指出：若g是n表二进制时1的个数，h为能整除的$n!$的2的最大乘幂指数，则

$$n=g+h$$

而$h=[n/2]+[n/2^2]+[n/2^3]+\cdots+[n/2^k]$，$k$是$n$的二进制位数。

这是法国数学家勒让德发现并证明的。

比如：$47=101111_2$， 故$g=5$。

又 $h=[47/2]+[47/2^2]+[47/2^3]+[47/2^4]+[47/2^5]=23+11+5+2+1=42$。

显然 $47=5+42$。

它的证明可略述如下：

设n的二进制表示为$a_k a_{k-1}\cdots a_1\ a_0$，其中$a_i$是0或1，其中1的个数是$g$。

又 $n=a_0+a_1 2+a_2 2^2\cdots+a_k 2^k$，

故 $\left[\dfrac{n}{2}\right]=a_1+a_2 2+\cdots+a_{k-1}2^{k-2}+a_k 2^{k-1}$。

一般地，当$0<r\leqslant k$时，我们有

$$\left[\frac{n}{2^r}\right]=\left[\frac{1}{2^r}\ (a_0+a_1 2+\cdots+a_{r-1}2^{r-1})\ +a_r+a_{r+1}2+\cdots+a_k 2^{k-r}\right]$$

注意到 $a_0+a_1 2+\cdots+a_{r-1}2^{r-1}\leqslant 1+2+2^2+\cdots+2^{r-1}=2^r-1<2^r$，

故 $(a_0+a_1 2+\cdots+a_{r-1}2^{r-1})/2^r<1$。

从而 $\left[\dfrac{n}{2^r}\right]=a_r+a_{r+1}2+\cdots+a_k 2^{k-r}(r=1,2,\cdots,k)$

而 $\sum\limits_{r=1}^{k}\left[\dfrac{n}{2^r}\right]=\sum\limits_{r=1}^{k}(a_r+a_{r+1}2+\cdots+a_k 2^{k-r})$

$=a_1+a_2(1+2)+a_3(1+2+2^2)+\cdots+a_k(1+2+\cdots$

$+2^{k-1})=a_1(2-1)+a_2(2^2-1)+\cdots+a_k(2^k-1)=$

$a_0+a_1 2+\cdots+a_k 2^k-(a_0+a_1+\cdots+a_k)$

$=n-(a_0+a_1+\cdots+a_k)$

注意到　$a_0+a_1+\cdots+a_k=g$，从而$h=n-g$

即　$n=h+g$

(10)将杨辉三角第n行上的$n+1$个数平移到从第$2n$列至$3n$到位置上，再将第n行中可被n整除的数圈起来。则

自然数k是质数$\Longleftrightarrow$表中第k列上所有的数都被圈了起来。

我们先来看看下表：

行＼列	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	…
0	1																				
1			①	①																	
2					1	②	1														
3							1	③	③	1											
4									1	④	6	④	1								
5											1	⑤	⑩	⑩	⑤	1					
6													1	⑥	15	20	15	⑥	1		
7															1	⑦	㉑	㉟	㉟	㉑	
8																	1	⑧	28	56	
9																			1	⑨	
10																					
…																					

由表中可见：$k=1,2,3$时结论成立。

对于大于 2 的偶数$k=2m$，我们有$m>1$，且第m行上第一个数出现在第k 列上，但这个数是 1，故不圈。而大于 2 的偶数均为合数，则结论对偶数 k是成立的。

今假设 k是奇数，我们下面证明：

若 k 是质数，则第 k 列上每个数都会圈起来；若k 是合数，则第 k 列上至少有一个数没有圈上。

注意到，第n 行上的数出现在第 k列上的充要条件是：

$$2n\leqslant k\leqslant 3n \text{ 即} \frac{k}{3}\leqslant n\leqslant \frac{k}{2}$$

只要看一下第n行就知道：这一行出现在第k列上的数是C_n^{k-2n}（见下表）：

行 \ 列	…	$2n$	$2n+1$	$2n+2$	…	k	…	$3n$	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
r	…	$C^0{}_n$	C_n^1	C_n^2	…	C_n^{k-2n}	…	C_n^n	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

(1) 若$k=p$是大于 3 的质数，则第k 列诸数为C_n^{p-2n}，这里$\frac{p}{3}\leqslant n \leqslant\frac{p}{2}$.

由于$p>3$，则$1<n<p$，故$(n,p)=1$。

从而$(n,p-2n)=1$。

如是，此列上每个数C_n^{p-2n}为：

$$C_n^{p-2n} = \frac{n!}{(p-2n)!\ (3n-p)!} =$$

$$\frac{n}{p-2n} \cdot \frac{(n-1)!}{(p-2n-1)!\ (3n-p)!}$$

$$= \frac{n}{p-2n} C_{n-1}^{p-2n-1}$$

故 $(p-2n)C_n^{p-2n} = nC_{n-1}^{p-2n-1}$.

注意到n整除上式左端，又n与$p-2n$互质，故

$n|C_n^{p-2n}$，即该数将被圈上。

（2）若k是一个奇的合数，则它可表为一些奇因子之积，令p为其因子之一，且

$k = p(2r+1)$.

因 k是合数，则$r \geqslant 1$，从而$p \leqslant pr$.

又 $2pr < k = 2pr + p \leqslant 3pr$，

从而，第$n = pr$ 行上有一个数出现在第k 列上，这个数是

$C_n^{k-2n} = C^p{}_{pr}$

注意到

$$\frac{1}{pr} C^p{}_{pr} = \frac{1}{pr}.$$

$$\frac{pr(pr-1)(pr-2)\cdots(pr-p+1)}{p!}$$

$$=\frac{(pr-1)(pr-2)\cdots[pr-(p-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots p}$$

当$1\leqslant i\leqslant p-1$，上式分子任何因子$pr-i$均不能被质数$p$整除，此即说

$pr\nmid C^{p}_{pr}$，即$n\nmid C_n^{k-2n}$

显然，这个数将不被圈上。

我们再谈一个关于不定方程解的问题（或勾股定理推广）与杨辉三角的关系。文献〔22〕中证明了下面的结论：

（11） 不定方程

$x^2+y^2=z^n$，$(x,y)=1$

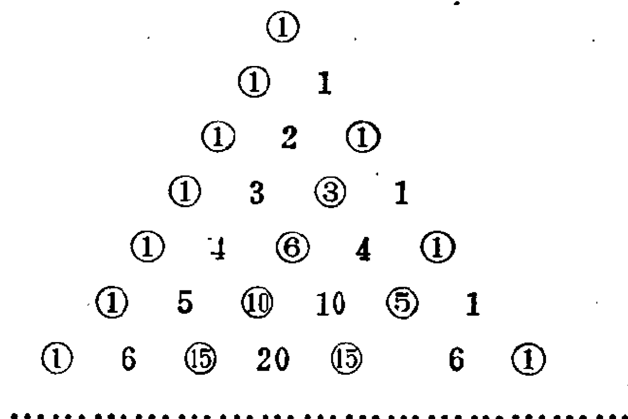
的一切整数解可表示为：

$$\begin{cases} x=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k} e^{n-2k} f^{2k} \\ y=\sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k C_n^{2k+1} e^{n-2k-1} f^{2k+1} \\ z=e^2+f^2,(e,f)=1 \end{cases}$$

$n=2$、3、4、5时我们有解：

方程	x	y
$x^2+y^2=y^2$	e^2-f^2	$2ef$
$x^2+y^2=z^3$	e^3-3ef^2	$3e^2f-f^3$
$x^2+y^2=z^4$	$e^4-6e^2f^2+f^4$	$4e^3f-4ef^3$
$x^2+y^2=z^5$	$e^5-10e^3f^2+5ef^4$	$5e^4f-10e^2f^3+f$
…	…	…

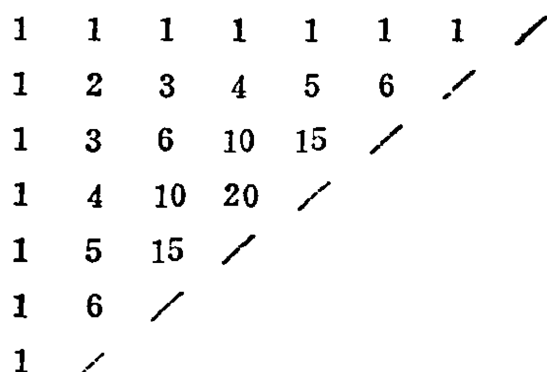
上述解可由杨辉三角得到（帮助我们去记忆），见下图：



其中带圈的数作为x的多项式系数，不带圈的作为 y的多项式系数，但符号均为正、负相间。

下面的一个性质也很奇妙.

(12)我们将杨辉三角改写成下面的形式：



1	1	1	1	1	1	1	⁄
1	2	3	4	5	6	⁄	
1	3	6	10	15	⁄		
1	4	10	20	⁄			
1	5	15	⁄				
1	6	⁄					
1	⁄						

则从左上角取任何n阶行列式均为1。

如1，$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$，$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1$，…等。

今用D_n表示问题中的n阶行列式，若用a_{ij}表示其中第i行，第j列元素$(1 \leqslant i, j \leqslant n)$。

由行列式元素的构造法则，我们能够证明：

$a_{ij}=a_{i,j-1}+a_{i-1,j}, a_{i1}=a_{1j}=1$

此即由组合等式$C^m_{n+1}=C^m_n+C_n^{m-1}$，且考虑行列式中元素构成直接可得到．

对D_n各行从最后两行开始，依次由下面一行减去其上面一行，经$n-1$次减法，则元素 a_{ij} 变成了$a_{i,j-1}$，且第一列除 $a_{11}=1$ 外，其余元素均为0。

再从最后两列开始，依次由后一列减去前一列，实施$n-1$次后，元素$a_{i,j-1}$变成$a_{i-1,j-1}$．且第一行元素除$a_{11}=1$外，其余的全部变成了0。

按第一行（或列）将D_n展开，即为D_{n-1}，如是，$D_n=D_{n-1}=\cdots=D_2=D_1=1$．

20．杨辉三角的应用

最后我们谈谈杨辉三角的用途。

利用杨辉三角首先可以得到二项式展开的系数，我们只要按照杨辉三角生成的规律，可以很容易地写出它的第1，2，3，…行，这样对于次数较低的二项式展开，应用杨辉三角还是方便的。

利用杨辉三角还可以计算某些自然数方幂和。

以上诸点，人们都已熟知，这儿也不再赘

述，我们想介绍一个利用杨辉三角求部分分式的方法。

我们把杨辉三角改写成图15—4的样子：

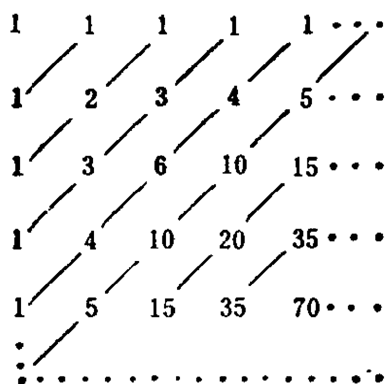


图 15—4

然后将它们的位置用图15—5中坐标系的坐标表示成：

1(0, 0)　1(0, 1)　1(0,2)　1(0,3)…

1(1, 0)　2(1, 1)　3(1,2)　4(1,3)…

1(2,0)　3(2,1)　6(2,2)　10(2,3)…

1(3,0)　4(3,1)　10(3,2)　20(3,3)…

………………

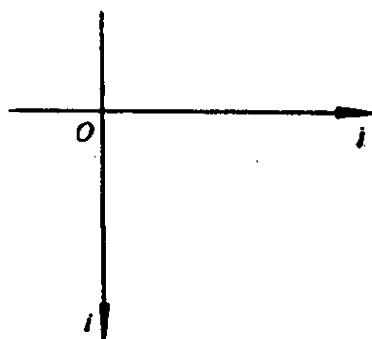


图 15—5

它称为4行4列矩形（杨辉三角）图。

然后我再定义符号

$$(i,j)=\frac{p(x)}{(-1)^{j}(\alpha-\beta)^{i+j}(x+\alpha)^{p-i}(\alpha+\beta)^{q}}$$

$\begin{pmatrix} i=1,2,\cdots \\ j=1,2,\cdots \end{pmatrix}$

其中p、q是给定的正整数，α、β是实常数，且$\alpha\neq\beta$，$p(x)$是确定的多项式。

可以证明：

(1) 有理真分式$1(0,0)=\dfrac{A}{(x+\alpha)^p(x+\beta)^q}$

(A是常数）可以表示成矩形（杨辉三角）图中$p+1$行、$q+1$列上的分式的线性组合。分解式中各分式的系数等于第p行、第q列上分别与各分式同行和同列处的组合数，唯有(p,q)系数取为0，即先作表：

$1(0,0)\ 1(0,1)\ 1(0,2)\cdots\ 1(0,q-1)$

$1(1,0)\ 2(1,1)\ 3(1,2)\cdots\ C_q^{q-1}(1,q-1)$

$1(2,0)\ 3(2,1)\ 6(2,2)\cdots\ C^{q-1}_{q+1}(2,q-1)$

$\cdots\cdots$

$1(p-1,0)C^1_p(p-1,1)\ C^2_{p+1}(s-1,2)\cdots C^{q-1}_{p+q-2}(p-1,q-1)$

$1(p,0)\ C^1_p(p,1)\ C^2_{p+1}(p,2)\cdots C^{q-1}_{p+q-1}(p,q-1)$

$1(0,q)$

$C_q^{p-1}(1,q)$

$C^{q-1}_{q+1}(2,q)$

$\cdots\cdots$

C^{q-1}_{p+q-2}

$0(p,q)$

则$A(0,0)=A[1(p,0)+C^1_p(p,1)+C^2_{p+1}(p,2)+\cdots+C^{q-1}_{p+q-1}(p,q-1)+0(p,q)+$

$C^{q-1}{}_{p+q-2}(p-1,q)+\cdots+C_q{}^{q-1}(1-q)+1(0,q)]$。

（2）若有理真分式为$\dfrac{p(x)}{(x+\alpha)^p(x+\beta)^q}$

则先将它按$\dfrac{1}{(x+\alpha)^p(x+\beta)^q}$分成部分分式，

这时$\dfrac{p(x)}{(x+\alpha)^p(x+\beta)^q}$的部分分式为$\dfrac{p(x)}{(x+\delta)^n}$

形状，δ为α或β，$1\leqslant n\leqslant \max(p,q)$.

若$p(x)$是 r次（$r<p+q$），先将 $p(x)$ 按$(x+\delta)$台勒展开：

$$p(x)=p(-\delta)+p'(-\delta)\,(x+\delta)+\frac{p''(-\delta)}{2!}$$

$$(x+\delta)^2\ +\cdots+\frac{p^{(r)}(-\delta)}{r!}(x+\delta)^r$$

则 $$\frac{p(x)}{(x+\delta)^n}=\frac{p(\delta)}{(x+\delta)^n}+\frac{p'(-\delta)}{(x+\delta)^{n-1}}+\cdots$$

$$+\frac{p^{(r)}(-\delta)}{r!\,(x+\delta)^{n-r}}$$

（3）对于有理真分式$\dfrac{p(x)}{(x^2+\alpha)^p(x^2+\beta)^q}$,

今令

$$(i,j)=\frac{p(x)}{(-1)^j(\alpha-\beta)^{i+j}(x^2+\alpha)^{p-i}(x^2+\beta)^{q-j}}$$

$(i,j=0,1,2,\cdots)$

再令　$x^2+\delta=y$，则　$x=\pm\sqrt{y-\delta}$，今仅取正值推导。

$$\frac{p(x)}{(x^2+\delta)^n}=\frac{p(\sqrt{y-\delta})}{y^n}=[\sqrt{y-\delta}$$

$$(A_0+A_1y+\cdots+A_ky^k)+B_0+B_1y+\cdots+B_ky^k)]$$

$$/y^n$$

$$\text{其中}\quad k=\begin{cases} r/2, & r\text{为偶数,}\\ (r-1)/2, & r\text{为奇数.}\end{cases}$$

即

$$\frac{p(x)}{(x^2+\delta)^n}=\frac{A_0x+B_0}{(x^2+\delta)^n}+\frac{A_1x+B_1}{(x^2+\delta)^{n-1}}+\cdots+$$

$$\frac{A_kx+B_k}{(x^2+\delta)^{n-k}}\qquad\qquad (*)$$

具体步骤是：先将$p(x)$按含x的奇次幂、偶次幂项分离：

$$p(x)=p(\sqrt{y-\delta})=\sqrt{y-\delta}\,p_1(y)+$$

$$p_2(y)$$

$$\text{其中}\quad p_1(y)=\sum_{i=0}^{k}A_iy^i,\ p_2(y)=\sum_{i=0}^{k}B_iy^i,$$

可得(＊)式。

当$n>k$时，(＊)为部分分式

$$\frac{A_0x+B_0}{(x^2+\delta)^n},\ \frac{A_1x+B_1}{(x^2+\delta)^{n-1}},\cdots,\frac{A_{n-1}x+B_{n-1}}{x^2+\delta}$$

之和，

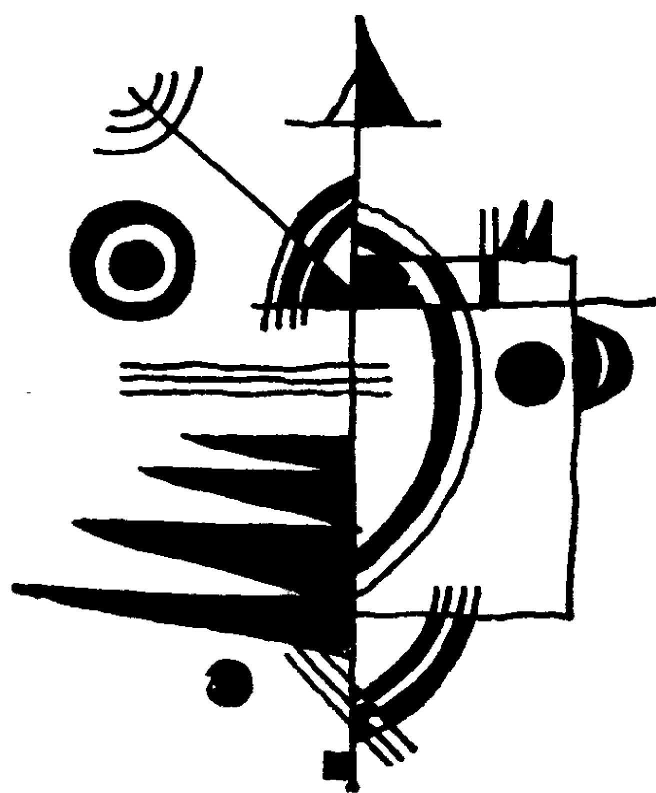
当$n\leqslant k$时，（*）为上述部分分式及整式

$(A_n x+B_n)\ (x^2+\delta)^0$，$(A_{n-1}x+B_{n-1})\cdot$
$(x^2+\delta)^1, \cdots, (A_k x+B_k)(x^2+\delta)^{k-n}$

之和。

关于它的理论及详细细节，可参见文献〔20〕。

十六 其他数字三角形



由于杨辉三角的许多奇特性质和美妙应用，加上它规律明显，直观形象等，这使人们开始探索其他数字三角形。

1．一个分段三角形与杨辉三角

我们先来看一个也产生杨辉三角的数字三角形。

将数1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$…，$\frac{1}{n}$，… 按照下面规律排成数表：自第二行起每个数均为其上一行两肩数字之差（后项减前项），可有：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} \\
& -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{12} & & -\frac{1}{20} & & -\frac{1}{30}\cdots & \\
& & \frac{1}{3} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60}\cdots & & \\
& & & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{20} & & -\frac{1}{60}\cdots & & &
\end{array}
$$

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{30}\cdots$$

$$-\frac{1}{6}\cdots$$

再将它顺时针旋转60°便有：

$$1$$

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} \quad -\frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad -\frac{1}{12} \quad \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{5} \quad -\frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad -\frac{1}{20} \quad \frac{1}{5}$$

$$-\frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad -\frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad -\frac{1}{30} \quad \frac{1}{6}$$

……………………………………………………

再将它们的符号全换为正号(取绝对值)后，每行诸数均除以该行最右面的一个数，则有：

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad 1$$

$$1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 1$$

$$1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} \quad 1$$

$$1 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{5} \quad 1$$

$$1 \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{6} \quad 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

最后表中每个数取倒数便得杨辉三角：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这只须注意到数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{n}$，…的差三角形即为

$$\frac{1}{C^0_0} \quad \frac{1}{2C_1^1} \quad \frac{1}{3C^2_2} \quad \frac{4}{4C_3^2}\cdots$$

$$-\frac{1}{2C^0_1} \quad -\frac{1}{3C^1_2} \quad -\frac{1}{4C^2_3}\cdots$$

$$\frac{1}{3C^0_2} \quad \frac{1}{4C^1_3}\cdots$$

$$-\frac{1}{4C^0_3}\cdots$$

其中负号出现在第 2 、 4 、 6 …行。

又当$k \leqslant n-1$时，下列等式成立：

$$\frac{1}{nC^k_{n-1}}-\frac{1}{(n+1)C_n^{k+1}}=\frac{1}{(n+1)C_n^k}$$

这只须注意到：

$$式左=\frac{k!}{n(n-1)\cdots(n-k)}-\frac{(k+1)!}{(n+1)n\cdots(n-k)}$$

$$=\frac{k!}{n(n-1)\cdots(n-k)}\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{k!}{n(n-1)\cdots(n-k)}\cdot\frac{n-k}{n+1}=\frac{1}{(n+1)C^k_n}$$

得到上面的三角形后，再实施题目的变换即可得杨辉三角。

2．推广的杨辉三角

下面来看一下推广的杨辉三角。

我们知道，杨辉三角与二项式展开系数有关。如果考虑三项式展开系数，则可下面的数表：

```
                1                          第0行
            1   1   1                      第1行
        1   2   3   2   1                  第2行
    1   3   6   7   6   3   1              第3行
         \  |  /
1   4   10  ⑯  19  16  10  4   1           第4行
```

1　5　15　30　45　51　45　30　15　5　1　第5行

……………………………………………………………

此表系这样构成：从第二行起表中每个数均为它上一行所对的数与它两肩上的数字之和，比如$16=3+6+7$等。

此表第 k行中的诸数恰好是三项式

$(x^2+x+1)^k$，$k=0,1,2,\cdots$

的展开式的诸系数（按升或降幂排列）。

这个数表也有许多性质，比如：

(1) 它是中心对称的。

(2) 表中每行诸数之和分别为 3^0、3^1、$3^2\cdots$

$1+1+1=3$

$1+2+3+2+1=3^2$

$1+3+6+7+6+3+1=3^3$

……………………………………………

这只须在$(x^2+x+1)^k$及其展开式中令 $x=1$即可。

(3) 表中各横行诸数相间地冠以＋、－号，然后再求和，则它们的和总是1。

这只须在 $(x^2+x+1)^k$ 及其展开式中令 $x=-1$即可。

(4) 表中每行诸数平方和总仍是表中的数（即三项式系数）。

如$1^2+2^2+3^2+2^2+1^2=19$等。

这只须考虑$(x^2+x+1)^n(x^2+x+1)^m=(x^2+x+1)^{m+n}$两边展开式的系数，还可有更一般的结论。

(5)表中“/”走向的第1、第2、第3斜行中诸数与杨辉三角中相应诸行的各段相同.

我们如果把三项式$1+\omega+\omega^2$的各次幂排列成推广的杨辉三角形状：

$$1$$

$$1+\omega+\omega^2$$

$$1+2\omega+3\omega^2+2\omega^3+\omega^4$$

$$1+3\omega+6\omega^2+7\omega^3+6\omega^4+3\omega^5+\omega^6$$

………… …… …………

则它的全部中间项和有表达式：

(6) $$1+\omega+3\omega^2+7\omega^3+\cdots=\frac{1}{\sqrt{1-2\omega-3\omega^2}}$$

这只须在我们上节提到过的结论（公式）：

$$\frac{f(z)}{1-\omega\varphi'(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!}\left[\frac{d^n f(x)[\varphi(x)]^n}{dx^n}\right]_{x=0}$$

中，令$\varphi(z)=1+z+z^2$，$f(z)=1$即可。

由 $$z=\frac{1-\omega-\sqrt{1-2\omega-3\omega^2}}{2\omega},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!}\left[\frac{d^n(1+x+x^2)}{dx^n}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\omega(1+2z)}}$$

$$=\frac{1}{1-2\omega-3\omega^2}$$

（注意 $\omega=\frac{z}{\varphi(z)}$）

当然该数表还有许多性质，那也请你自行去发掘一下。

3．杨辉三角的再推广

我们将上数表还可再行推广，可得（$x^3+x^2+x+1)^n$展开式系数表：

1

1 1 1 1

1 2 3 4 3 2 1

1 3 6 10 12 12 10 6 3 1

1 4 10 20 31 40 44 40 31 20 10 4 1

………………………………………………

此表特点是：表中诸数均为其肩上四个数之和。比如31＝3＋6＋10＋12等。

此表仿杨辉三角性质，也可找到其某些有趣

的性质，这留给读者考虑。

再如我们还可以造一些其他数表，它常可以帮助我们进行某些计算，比如：

1 1 1 1

1 2 2 2 1

1 3 4 4 3 1

1 4 7 8 7 4 1

1 5 11 15 15 11 5 1

……………………………………

此表特点是：第1行全是1（四个1），以后诸行每个数均为其上一行两肩上的数之和。

此表第n行中的诸数，恰为$(1+x^2)(1+x)^n$展开式中的系数（按x的升或降幂排列）。

当然，你也会发现它的某些性质，同时我们还可以把这种推广继续下去。

4．莱布尼兹三角形

下面看看其他的数字三角形，先来看所谓莱布尼兹三角形：

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{6}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{6}$$

……………………………………………………

它与我们前面提到的产生杨辉三角形的数字三角形相象（只是没有+、-号），它实际上也是将杨辉三角中的每个数$C^r{}_n$换成$1/(n+1)C^r{}_n$得到的。

表中的数的关系是：如图16—1所示，

相邻三数，则$c=a-b$.比如：

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\quad \frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30}.$$

这一点也正是我们前面提到过的关系式：



图 16—1

$$\frac{1}{(n+1)C_n^{r-1}}+\frac{1}{(n+1)C_n^k}=\frac{1}{nC_{n-1}^{r-1}}$$

莱布尼兹三角也有许多有趣的性质，比如：

表中“/”走向第2斜线上诸数和恰好是1：

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots$$

（这是把数 1 表示为无穷项不同的单位分数和* ）

表中“/”走向第3斜线上上诸数和恰好是 $\frac{1}{2}$：

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\cdots$$

一般地：表中“/”走向第 $k+1$条斜线上诸数和恰好为$1/k$。

---

* 关于1表为不同单位分数和的问题，有许多有趣的结果，项数最少者是：$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$（注意到这与所谓“完全数”有关），如果只用奇数分母表示，1976年人们发现：项数最少者是九项，它有五组解，这五组解的前六项均为：

1/3，1/5，1/7，1/9，1/11，1/15，而其余诸项分别为：

1/35，1/45，1/231；1/21，1/135，1/10395；

1/21，1/165，1/693；1/21，1/231，1/315；

1/33，1/45，1/385

若只有奇数分母表示，其最大分母的最小表示为：

$1=1/3+1/5+1/7+1/9+1/11+1/33+1/35+1/45+1/55+1/77+1/105$.

顺便讲一句，关于1表为不同单位分数的方法有多少，目前连近似值估计也未得到。

5. 法莱三角

我们再来看看法莱三角。

从$\frac{0}{1}$、$\frac{1}{1}$作为第一行开始，以后诸行均是以$\frac{0}{1}$开头，$\frac{1}{1}$结尾；中间的数是这样产生：

把它两肩上的数的分子相加作为该数的分子；把它两肩上的数的分母相加作为该数的分母（注意约分）。

这样，我们可以得到数字三角形：

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{0}{1} & & \frac{1}{1} & & \\ & \frac{0}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{1} & \\ & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\ \frac{0}{1} & & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{1}{1} \end{array}$$

接着我们将表中的末两行数按箭头方向顺序排在一起：

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1}$$

再对它实施上述产生表中数的步骤可得：

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \frac{0}{1} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{1}{1} & \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & \\ \frac{0}{1} & & \frac{1}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{4} & & \frac{1}{1} \end{array}$$

仍将它们按图中箭头方向排成一列.

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{1}{1}$$

令实施前述运算要求可得：

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{5}\quad\frac{2}{7}\quad\frac{3}{8}\quad\frac{3}{7}\quad\frac{4}{7}\quad\frac{5}{8}\quad\frac{5}{7}\quad\frac{4}{5}\quad\frac{1}{1}$$

如此下去，我们可以得到数字三角形：

$$\frac{0}{1}\qquad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\qquad\frac{1}{2}\qquad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{3}\qquad\frac{1}{2}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{2}{7}\frac{1}{3}\frac{3}{8}\frac{2}{5}\frac{3}{7}\frac{1}{2}\frac{4}{7}\frac{3}{5}\frac{5}{8}\frac{2}{3}\frac{5}{7}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\frac{1}{1}$$

……………………………………………………

其表中第k行除去分母大于k的分数后，便囊括了分母小于k 的全部既约真分数，并且表中数的顺序即为分数大小的顺序。这些分数称为法莱分数列（法莱贯），具体地讲为 k阶法莱贯。

如0，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，1是五阶法莱贯。

如果定义分数$\frac{b}{a}$、$\frac{d}{c}$的中项为$\frac{b+d}{a+c}$，则法莱分数贯有下列性质：

(1) n 阶法莱贯 $\{F_n\}$ 的相邻项的中项是不可约的，且其分母大于 n；

(2) n 阶法莱贯 $\{F_n\}$ 的两相邻项之差为其分母乘积的倒数；

(3) 三个连续项中间的一项为它相邻项的中项。

如果我用坐标系将法莱分数$\frac{b}{a}$表示出来，即用点(a,b) 表示这个分数；我们可以得到八阶法莱分数贯：

$\frac{0}{1}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{5}{5}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}$，

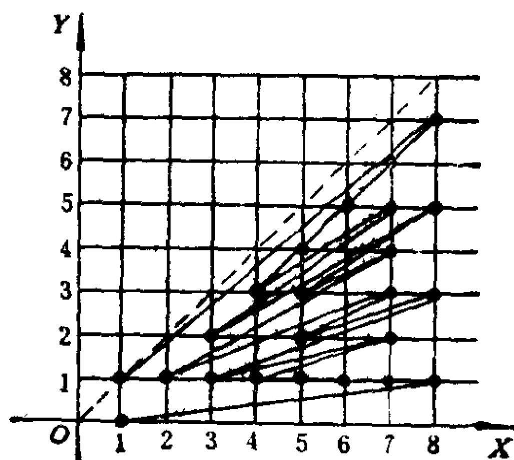


图 16—2

$\frac{6}{7}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{1}{1}$的全部点，这些点有如下性质：

（1）由$\frac{b}{a}$是既约分数，故连接（0,0）与(a,b)的线段，不经过任何整点（两坐标皆为整数的点）；

（2）所以点均在x轴和第一象限夹角平分线之间；

（3）对应于n阶法莱贯的点到y轴最远距离是n。

我们再按照法莱分数从小到大的顺序将它们对应的点全部连接起来即为图16—2。

如果我们用点$(a-b,b)$来表示法莱分数$\frac{b}{a}$，

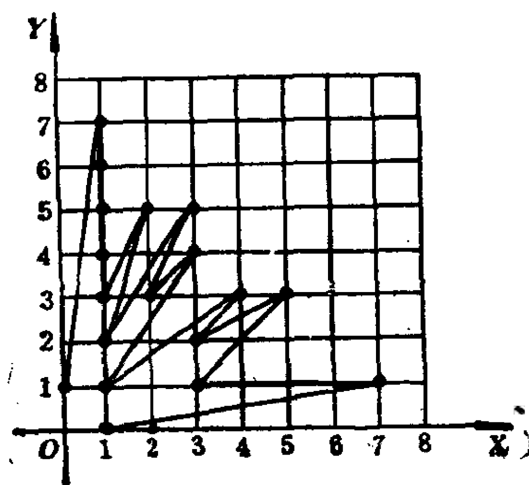


图 16—3

如上把这些点依次连接起来，将会得到一个对称的图形（见图16—3）.

法莱分数还有一些性质及用途，这儿不再赘述了.

6. 其他三角数表

我们已经看到：数表是为了某些方便而设计的，用下面的数表，可求调和级数的部分和.

设调和级数前n项和：

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+(k-1)a}$$

由

$$\frac{d}{dx}\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{x+(k-1)a}$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{1}{x+(k-1)a}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+(k-1)a}=s_n,$$

故 $s_n=\left\{\frac{d}{dx}\prod_{k=1}^{n}[x+(k-1)a]\right\}\Big/\prod_{k=1}^{n}$ $[x+(k-1)a]$.

若设 $\prod_{k=1}^{n}[x+(k-1)a]=x^n+\sum_{k=1}^{n}A_k x^{n-k}$

a^k,

则

$$s_n = \left[nx^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(n-k)x^{n-k-1}a^k\right]$$

$$/\left[x^n + \sum_{k=1}^{n} A_k x^{n-k}a^k\right] \qquad (*)$$

于是求调和级数部分和的问题便归结为求(＊)的系数A_k问题.为此我们造下面数字三角形：若 k 表示连乘积

$x(x+a)(x+2a)\cdots(x+ka)$

中最后一项 a 的系数，则：

（1）表的第1行与第2行分别是 x 和 x-$(x+a)$的展开式系数1与1，1，将之对应的$k=0$, 1写在其旁；

（2）表中第1列元素全为1；

（3）其余各行元素按下法写出：用 k乘任一元素 A,加上A相邻的右方元素 B,即为 B 的下方元素C,即可用图16—4表示这种运算关系：

这样我们可以得到下面的数字三角形表：

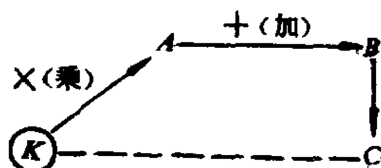


图 16—4

表中第 n 行诸数即为(＊)式中展开式系数：

	k值							
（第1行）	0	1						
（第2行）	1	1	1					
（第3行）	2	1	3	2				
（第4行）	3	1	6	11	6			
（第5行）	4	1	10	35	50	24		
（第6行）	5	1	15	85	225	274	120	
	⋮	…………						
（第n行）	$n-1$	1	A_1	A_2	A_3	………	A_{n-1}	
（第$n+1$行）	n	1	$n+A_1$	nA_1+A_2	nA_2+A_3	……	$nA_{n-2}+A_{n-1}$	nA_{n-1}

$1, A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$.

证明可用数学归纳法来完成，只须注意到用$(x+na)$同乘（*）式两边后有：

$$\prod_{k=1}^{n+1}[x+(k-1)a] = x^{n+1}$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}(nA_k + A_{k+1})x^{n-k}a^{k+1} + nA_{n-1}xa^n$$

即可。

实际运算时，只须先求得（*）式中分母的多项式，然后对其微导即为分子。

我们再来介绍一个可以用来解某些线性方程组和求某些级数和数表。当然，它也视为辉三角形的推广：

表是这样构造的：

1）$a_{i1}=1, a_{ii}=1$；

1

1 1

1 3 1

1 7 6 1

1 15 25 10 1

1 31 90 65 15 1

1 63 301 350 140 21 1

…………………………………………

1 a_{i2} a_{i3} a_{i4} ………$a_{i,i-1}$ 1

2) $a_{i+1,j}=ja_{i,j}+a_{i,j+1}$ $(i\geqslant j)$.

即知道第 i 行元素，可求出第 $i+1$ 行元素，比如：

$$\overset{\times 3}{7+6}\to 25 \qquad \overset{\times 5}{10+1}\to 15$$

等等。

注意到杨辉三角形中元素间关系是：

$a_{21}=a_{22}=1$，$a_{i+1,j}=a_{i,j}+a_{i,j-1}$ $(i\geqslant j)$

利用这个数表可以解一类线性方程组和求一类级数和。

（1）用于解一类线性方程组

为确定多项式 $f_r(n)=\sum_{i=0}^{r}a_in^i$ 的系数 $a_i(i=0,1,\cdots,r)$，常需解线性方程组

$$Ax=c \qquad (*)$$

$$
\text{其中} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^r \\ & \cdots & \cdots & & \\ 1 & r & r^2 & \cdots & r^r \\ 1 & r+1 & (r+1)^2 & \cdots & (r+1)^r \end{pmatrix}
$$

$\boldsymbol{x} = (a_0, a_1, \cdots a_{r-1}, a_r)^T$

$\boldsymbol{c} = (c_0, c_1, \cdots, c_{r-1}, c_r)^T$

今先考虑差分：

$$
\begin{array}{lllll}
c_0 & & & & \\
 & \triangle c_0 & & & \\
c_1 & & \triangle^2 c_0 & & \\
 & \triangle c_1 & & \triangle^{r-1} c_0 & \\
c_2 & & & & \triangle^r c_0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \triangle^{r-1} c_1 & \\
c_{r-2} & & & & \\
 & \triangle c_{r-2} & & & \\
c_{r-1} & & \triangle^2 c_{r-2} & & \\
 & \triangle c_{r-1} & & & \\
c_r & & & &
\end{array}
$$

令 $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, y_2, \cdots, y_r)^T$

$$
= \left(c_0, \triangle c_0, \frac{\triangle^2 c_0}{2!}, \cdots, \frac{\triangle^r c_0}{r!}\right)^T
$$

再列方程：在前表中取 $r+1$ 行元素，且令

$$
B_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & 0 \\ 1 & 3 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{r+1,2} & a_{r+1,3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
B_1^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \qquad (**)
$$

显然此方程较(*)简便。

这只须注意到：若令

$$B_2=\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 2\cdot1 & & \\ 1 & 3 & 3\cdot2 & 3\cdot2\cdot1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & r & r(-1) & r(r-1)(r-2)\cdots r! & \end{pmatrix}$$

可以验证：$A=B_2B_1^T$，则方程（$*$）可化为

$Ax=B_2B_1^Tx=c$

令　$B^T{}_1x=y$，则　$B_2y=c$。

用数学归纳法可以证明上方程的解为：

$$y_i=\frac{\triangle^i c_0}{i!}(i=0,1,2,\cdots,r)$$

即方程$Ax=c$转化为求解$B^T{}_1x=y$。

（2）用于一类级数求和

在《排队论》及考虑植物分蘖规律时，需要计算级数：

$$s\ (r,n,q)\ =\sum_{k=1}^{n} k^r q^k (r\text{为0或正整数},q\neq1)$$

我们先利用前面的数表构造函数列

$a_0(q)=1,a_1(q)=-1$，$a_2(q)=(q-1)+2!$，$a_3(q)=-[(q-1)^2+3\cdot2!(q-1)+3!]$；…

$a_i(q)=(-1)^i[(q-1)^{i-1}+2!a_{i2}(q-1)^{i-2}+3!a_{i3}(q-1)^{i-3}+\cdots+(i-1)!a_{i,i-1}(q-1)+i!)$

它们的特点是：

① $a_i(q)$为$q-1$的$i-1$次多项式，且按降幂排列；

②$(q-1)^{i-j}$的系数为$j!\,a_{ij}$；

③$a_i(q)$的符号为$(-1)^i$.

这样，由递推关系

$$s(r,n,q)=a_{r1}qs'(0,n,q)+a_{r2}q^2\,s''(0,n,q)+\cdots+a_{rr}q^rs^{(r)}\ (0,n,q)$$

及$s(0,n,q)=\sum\limits_{k=1}^{n}q^k=\dfrac{q(q^n-1)}{q-1}$求导后代入上式，合并化简可有

$$s(r,q,n)=\sum_{k=1}^{n}\ k^rq^k$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{r}\ \frac{c_r{}^ia_i(q)}{(q-1)^{j+1}}n^{r-i}\right]q^{n+1}-\frac{qa_r(q)}{(q-1)^{r+1}}\qquad(***)$$

特别地若$|q|<1$时有

$$s(r,q)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^rq^r=-\frac{q\ a_r\ (q)}{(q-1)^{r+1}}$$

此外，利用表还可以导出伯努利数的关系式

$$B_i=\frac{1}{2}a_{i1}-\frac{1}{3}a_{i2}+\frac{2!}{4}a_{i3}+\cdots+(-1)^{j-1}$$

$$\frac{(j-1)!}{j+1}a_{ij}+\cdots+(-1)^{i-1}\frac{(i-1)!}{i+1}a_{ii}(i<1)$$

（可以验证$B_{2i+1}=0$，$i=1,2,3,\cdots$）

由（＊＊＊）取极限可得到：

$$\sum_{k=1}^{n}k^r=\lim_{q\to1}\sum_{k=1}^{n}k^rq^k$$

而 $$\sum_{k=1}^{n}k^r=\frac{1}{r+1}n^{r+1}+\frac{1}{2}n^r+\sum_{i=2}^{r}\frac{C^{i-1}{}_rB_in^{r+1-i}}{i}$$

再由右端运用罗比达法则求极限值后，比较两端 n的系数即可得到上面伯努利数的关系式。

这方面的具体例子可见文献[26]。

最后我们想介绍一下所谓Stirling数三角形.

对于积$\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)$的展开式$\sum_{k>0}s(n,k)\ t^k=\sum_{0<k<n}s(n,k)t^k$ $(n\geqslant1)$，其中 $s(n,k)$ 是 t^k 的系数；及其对偶形式（将t^n展成阶乘积形式）：

$$t^n=\sum_{k>0}S(n,k)\cdot t(t-1)\cdots(t-k+1)$$

$$=\sum_{0<k<n}S(n,k)\cdot t(t-1)\cdots(t-k+1)$$

$(n \geqslant 1)$

这儿 $s(n,k)$ 是 $t(t-1)\cdots(t-k+1)$ 的系数，则称$S(n,k)$和$S(n,k)$分别为第一类Stirling数和第二类Stirling 数，它们在许多问题上（如有限差分）均有应用。

为完备计，补充定义：

$s(0,0) = S(0,0) = 1$；

$s(n,k) = S(n,k) = 0$，若$k<0\leqslant n$。

不难证明两类Stirling 数分别有如下递推关系：

$s(n+1,k) = S(n,k-1) - ns(n,k)$，$n\geqslant 0$，$k\geqslant 0$；

$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k)$，$n\geqslant 0$，$k\geqslant 0$。

这样我们造出类似于杨辉三角的两类 Stirling数三角形：

第一类Stirling数$s(n,k)$表的造法

n \ k	0	1	2	3	4	…
1	0	1	0	0	0	…
2	0	−1	1	0	0	…
3	0	2	−3	1	0	…
4	0	−6	11	−6	1	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…

即第$n+1$行k列交口处数由前一行前一列交口处数减去前一行本列交口处数的n倍（图中折线箭头之尾的数加上竖直箭头之尾的数与其旁边圈内数之积，即为两箭头所指的数）：

$$\begin{array}{ccc} S(n,k-1) & & s(n,k) \\ \Big\downarrow & & \downarrow -n \\ & \longrightarrow & s(n+1,k) \end{array}$$

如是可有第一类Stirling数三角形：

1						
-1	1					
2	-3	1				
-6	11	-6	1			
24	-50	35	-10	1		
-120	274	-225	85	-15	1	
720	-1764	1624	-735	175	-21	1

…………………………………………………………

类似地可有：

第二类 Stirling数$S(n,k)$表的造法

n \ k	1	2	3	4	5 …
1	1	0	0	0	0 …
2	1	1	0	0	0 …
3	1	3	1	0	0 …
4	1	7	6	1	0 …
5	1	15	25	10	1 …
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ …

如是可得第二类Stirling数三角形：

1						
1	1					
1	3	1				
1	7	6	1			
1	15	25	10	1		
1	31	90	65	15	1	
1	63	301	350	140	21	1

…………………………………………………………

顺便说一句，第二类 Stirling 数可用组合数明显表出：

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j j^n$$

但第一类 Stirling数却不存在这种表达式。另外两类Stirling数间还有关系：

$$\sum_{k>0}s(n,k)S(k,m)=\sum_{k>0}S(n,k)s(k,m)$$

$$=\delta_{nm}=\begin{cases}1, & 若n\neq m\\ 0, & 若n=m\end{cases}$$

另一类与Stirling 数很相象且与之有密切联系的数叫Lah数，记为$L_{n,k}$，其为展开式：

$$\prod_{k=0}^{n-1}(-x-k)=\sum_{k>0}L_{n,k}\prod_{i=0}^{k-1}(x-i)\quad(n\geqslant 0)$$

的系数，且定义：

$L_{0,0}=1$，$L_{n,k}=0$若$0\leqslant n<k$或$k<0\leqslant n$

关于它这儿就不再赘述了。

参考文献

书籍与专著

〔1〕 伏洛别也夫，斐波那契数，中国青年出版社，1954

〔2〕 马库希维奇，循环级数，中国青年出版社，1952

〔3〕 M.克莱因，古今数学思想（1～4册），上海科学技术出版社，1979～1982

〔4〕 梁宗巨，世界数学史简编，辽宁人民出版社，1980

〔5〕 李迪，中国数学史简编，辽宁人民出版社，1984

〔6〕 G.波利亚，数学的发现（1～2卷），内蒙古人民出版社，1980～1981

〔7〕 华罗庚，华罗庚科普著作选集，上海教育出版社，1984

〔8〕 严镇军，从正五边形谈起，上海教育出版社，1980

〔9〕 邓乃扬等，无约束最优化计算方法，科学出版社，1982

〔10〕 席少林等，最优化计算方法，上海科学技术出版社，1983

〔11〕柯召、孙琦，单位分数，人民教育出版社，1981

〔12〕史坦因豪斯，数学万花筒，上海教育出版社，1980

〔13〕ú．库尔沙克等，匈牙利奥林匹克数学竞赛题解，科学普及出版社，1979

〔14〕陈湘能等译，国际最佳数学征解问题分析，湖南科学技术出版社，1983

〔15〕A．B．萨多夫尼契，大学生数学竞赛题解汇集，科学普及出版社，1982

〔16〕D.E.克努特，计算机程序设计技巧，国防工业出版社，1980

〔17〕王元，谈谈素数，上海教育出版社，1978

〔18〕柯召，魏万迪，初等组合学漫话，科学出版社，1984

〔19〕G.P. Wadsworth，应用概率（上），高等教育出版社，1984

〔20〕华罗庚，优选学，科学出版社，1981

〔21〕〔苏〕A·Я·辛钦，连分数，上海科学技术出版社，1961

〔22〕Richard K. Gug, Unsolved problems in Number Theory, New York HeidelbergBerlin

〔23〕徐利治，蒋茂森，组合数学入门，辽宁教育出版社，1985

〔24〕吴振奎，中学数学证明方法（修订版），辽宁人民出版社，1985

〔25〕吴振奎，中学数学计算技巧，辽宁人民出版社，1982

短文或论文

〔1〕 熊廷煌，有趣的杨辉三角形，中学理科教学，1979年第4期

〔2〕 陈永明译，斐波那契数和循环小数，中学数学教学，1984年第1期

〔3〕 祁阿义，从Fibonacci数列谈起，中学数学教师，1982年第1期

〔4〕 刘文，递归数列的通项与求和，初等数学论丛（第4辑），上海教育出版社，1982

〔5〕 华宣，一道行列式习题的解法及其推广，中学数学，1982年第5期

〔6〕 陈银通、余长安，关于斐波那契级数的一个新的表达式，数学通讯，1983年第1期

〔7〕 胡久稔，“问题征解”解答，数学通讯，1984年第4期

〔8〕 贾国鉅，一道诡辩题与斐波那契数列，中学数学，1982年第1期

〔9〕 王勤国，也谈一道诡辩题与斐波那契数列，中学数学，1982年第4期

〔10〕 翁铁生，从连分数推导斐波那契数的几个性质，数学通报，1964年第8期

〔11〕 R.Honsberger，组合分析与数论中三个奇妙的结果，数学译林，1984年第4期

〔12〕 柯召，孙琦，关于 Fibonacci平方数，四川大学学报，1965年第2期

〔13〕 R.Honsberge，Gabriel Lame 定理，数学译林，1984年第4期

〔14〕詹姆斯·利根，黄金比，数学通讯，1985年第1期

〔15〕孙戈红，数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的一些性质及应用，中学数学，1982年第3期

〔16〕蒋省吾，黄金三角形、黄金矩形及其性质，中学数学，1983年第5期

〔17〕张钧云、荆水成，黄金三角形的性质补遗，中学数学，1984年第2期

〔18〕单墫，黄金矩形的一些性质，中学生数学，1981年第1期

〔19〕洪加威，论黄金分割法的最优性，数学的实践与认识，1973年第2期

〔20〕谢力同、刘家壮，完美矩形，数学进展，第13卷第4期

〔21〕杨宗培，杨辉三角对部分分式的应用，数学通报，1979年第2期

〔22〕梁宗巨，调和级数求和的一般方法，数学通报，1964年第1期

〔23〕郑格于，勾股定理的推广，数学通报，1964年第9期

〔24〕胡久稔，关于斐波那契数的平方数与可除性（油印稿），1982

〔25〕——，格点上的一个离散数学问题，数学通报，1981年第3期

〔26〕周英，一张数表的应用，数学的实践与认识，1977年第4期

〔27〕罗见今Nim——从古代的游戏到现代的数学，自然杂志，9卷1期

〔28〕闵乐泉，李宗元，关于准晶体结构的一些数学回答，科学通报1985年15期

译　名　对　照

（按中文姓氏笔画为序）

马拉尔弟〔法〕（Maraldi）
马卡谢维奇〔苏〕（А·И·Маркушевеич）
开卜勒〔德〕（Kepler, 1571—1630）
韦德林（M·Wunderlich）
巴斯卡〔法〕（Pascal, 1623—1662）
比内（Бирон）
布卡姆（Bouwkamp）
布鲁克（Brooks）
史坦因豪斯〔波〕（H.Steinhaus, 1887—1972）
卡西尼〔法〕（Cassini, J.D. 1625—1712）
列俄木〔法〕（de Réaumur, 1683—1757）
达·芬奇〔意〕（da Vinei, 1452—1519）
伏洛别也夫〔苏〕（Н·Н·ВороБьев）
华罗庚〔中〕（1910—1985）
丢番图〔希〕（Diophantus, 约246—330）
闵可夫斯基〔俄→德〕（Minkowski, 1864—1909）
杨辉〔中〕（南宋时期，约13世纪）
麦森〔法〕（Mersenne, 1588—1648）
伯努利〔荷〕（Bernoulli·J· 1654—1705）
希尔伯特〔德〕（D·Hilbert, 1862—1943）
希姆松〔英〕（Simson）
狄金维蒂吉（Duijvestijn）
法莱（Farey）

泽林斯基（Zerlisky）

欧拉〔瑞士〕（Euler，1707—1783）

欧多克斯〔　〕（Eudoxus,约前408—355）

拉格朗日〔法〕（Lagrange，1736—1813）

拉姆〔法〕（lame· G·1795—1870）

拉赫（Lah）

拉赫曼〔美〕（Lehmer）

拉伯尔特（Robert）

奇拉特（Girard）

阿皮亚尼斯〔德〕（Apianus，1495—1552）

罗莱特（A.P.Rollett）

罗比达〔法〕（L'Hospital，1661—1704）

范达蒙〔法〕(Vander monde·A·T·1735—1796）

柏拉图〔希〕（Plato,前430—349）

莱布尼兹〔德〕（Leibniz，1646—1716）

胡久稔〔中〕（中科院沈阳计算所）

柯召〔中〕（四川大学教授）

威勒（Wyler）

威尔逊（Wilson.J）

哈密顿〔英〕（Hamilton，1805—1865）

科恩（Cohen）

高斯〔德〕（Gauss，1777—1855）

哥西〔法〕（Cauchy，1789—1857）

贾宪〔中〕（11世纪）

格拉海姆〔美〕（Graham）

费尔马〔法〕（Fermat，1601—1665）

费希纳（Fercina）

冠尼希〔瑞士〕（Koenig，?—1757）

勒让德〔法〕(legendre，1752—1833）

棣美佛〔法〕 (de Moivre, 1667—1754)
基尔霍夫 (Kirchhoff·G)
普特南〔美〕 (W·L·Putnam)
斯特林〔英〕 (Stirling, 1692—1770)
斯特瓦特〔美〕 (Stewart, G·W·)
斐波那契〔意〕 (Fibonacci, 1170 ?—1250此为绰号，本名 Leonardo)
雅谷比〔德〕 (Jacobi, 1804—1851)
鲁宾逊 (Robinson, G·D·)
鲁卡斯〔英〕 (Lucas)
鲁金〔苏〕 (Лузин, н·н·1883—1950)
鲁德维格 (Rudviger)
戴维斯〔美〕 (Davis, M)

26